

البكالوريا بين يديك

BAC

محمد صابور

القواعد
والموافقات

Mekk. Ayoub

100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد

Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

Catalogue Fiche n°

محمد صابور

Secteur:

3896

الشيخ
الشيخ
2

القواسم و الموافقات

100 تمرين تطبيقي
البرنامج الجديد

الشعب : رياضيات
- تقني رياضي

الرجاء من الإخوة الدعاة للمؤلفين
والوالد الكريم . رَحِمَهُ اللهُ .

Scanned by: Mekk. Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

رقم الإيداع القانوني : 5189 - 2007

ردمك : 8 - 2054 - 0 - 9947 - 978 : ISBN

دار المفيد للنشر و التوزيع - عين مليلة -

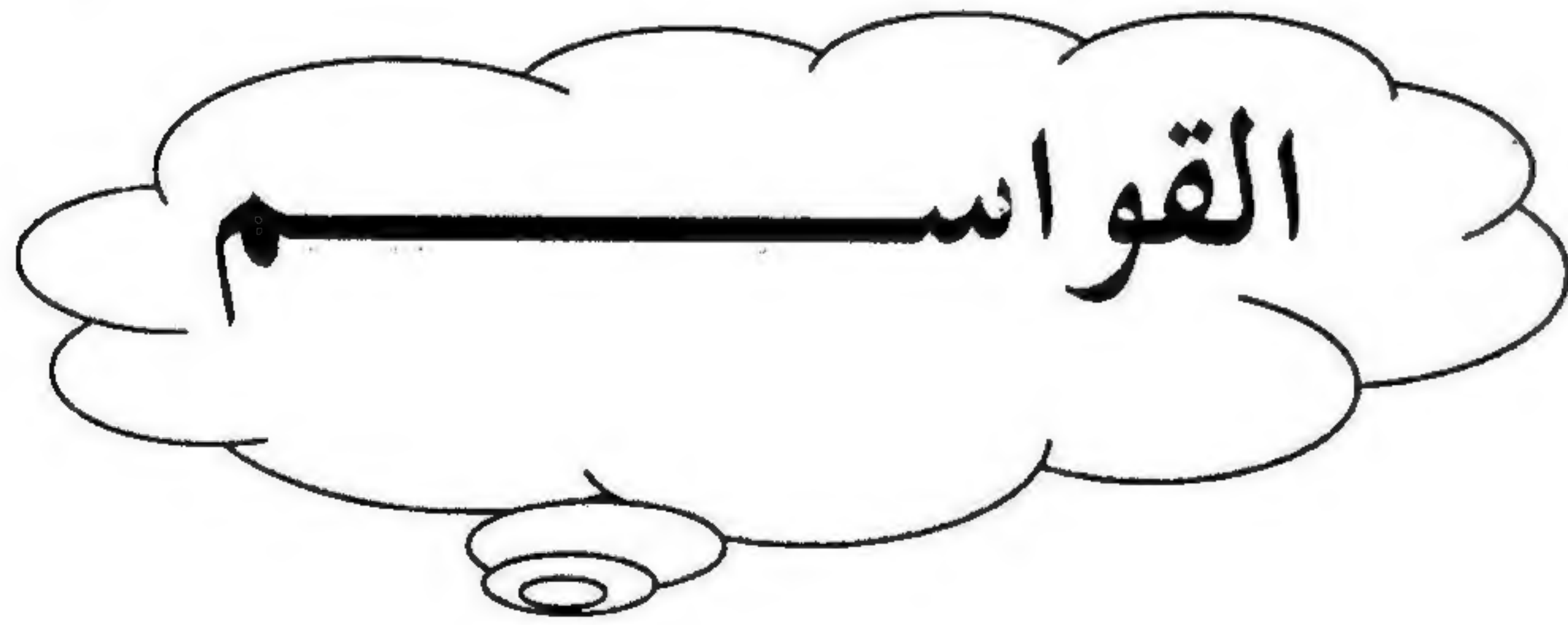
032 - 45 - 10 - 11

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف
المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .
أما بعد أخي القارئ أقدم إليك كتابا جديدا عنوانه
القواسم والموافقات يضاف في سلسلة البكالوريا بين يديك .
يحتوي هذا الكتاب 100 تمرين تطبيقي منها المحلولة حلا
مفصلا ومنها المقترحة للحل.
إن كثرة التمارين الموجودة في هذا الكتيب تساعد طلبة
شعبتي الرياضيات و التقني رياضي على تجاوز كل الصعوبات
التي يتلقونها في محور القواسم والموافقات .
وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق كما أرجو
من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظتهم البناءة
لتحسين محتوى هذا الكتيب .
كما أشكر شكرا جزيلا كل من ساهم من بعيد أو قريب في
إنجاز هذا العمل المتواضع .

محمد صابور

الجزء الأول



الإهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى :

- والدي الكريمين.
- رجال التعليم المخلصين في عملهم .
- أبنائي الطلبة متمنيا لهم التوفيق في البكالوريا .

محمد صابور

القواسم

(1) القسمة في \mathbb{Z}

a و b عدنان صحيحان ($a \neq 0$). نقول بأن العدد a يقسم العدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $b = ka$. نقول أيضا أن العدد b مضاعف للعدد a .

* خواص

a, b, c ثلاثة أعداد طبيعية غير معدومة. إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .
 a و b عدنان صحيحان حيث $a \neq 0$. إذا كان a يقسم b فإن a يقسم kb حيث $k \in \mathbb{Z}$.
 a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة و $a \neq 0$. إذا كان a يقسم العددين b و c فإن a يقسم $mb + nc$ حيث $(m; n) \in \mathbb{Z}^2$.

(2) قواسم عدد طبيعي

N عدد طبيعي محلل إلى جداء عوامل أولية كما يلي :
 $N = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$ حيث p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية و a_1, a_2, \dots, a_n أعداد طبيعية فإن عدد قواسم N هو

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)$$

مثال: $A = 2^2 \times 3^4$, $B = 2 \times 5^2 \times 7^3$. عدد قواسم A هو

$$15 = (2+1)(4+1) \text{ وعدد قواسم العدد } B \text{ هو } 24$$

أسألك اللهم علما نافعا



(3) القاسم المشترك الأكبر لعددین طبيعيين

تعريف: a و b عددین طبيعيين غير معدومين و D هي مجموعة القواسم المشتركة لهما . يسمى أكبر عنصر في المجموعة D بالقاسم المشترك الأكبر للعددین a و b .

ونرمز له بـ $PGCD(a; b)$

* خواص

- مجموعة القواسم المشتركة للعددین الطبيعيين a و b هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر .

- القاسم المشترك الأكبر لعددین طبيعيين غير معدومين

a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسّمات

خوارزمية أقليدس .

- a و b عددان طبيعيان غير معدومين و k عدد طبيعي

غير معدوم ، فإن $PGCD(ka; kb) = kPGCD(a; b)$.

- إذا كان a يقسم b فإن $PGCD(a; b) = a$.

- a و b عددین طبيعيين غير معدومين .

إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ فالعددین a و b أوليان فيما

بينهما .

- a و b عددین طبيعيين غير معدومين و d قاسمهما

المشترك الأكبر ، فإن $a = da'$ و $b = db'$ حيث a' و b'

هما أوليان فيما بينهما .

* القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية

للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية

نحلل هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية ثم نحسب جداء

العوامل المشتركة على أن نأخذ كل عامل مرة واحدة وبأصغر أس .

(4) المضاعف المشترك الأصغر لعددین طبيعيين

تعريف: a و b عددین طبيعيين غير معدومين و M هي مجموعة المضاعفات المشتركة لهما . يسمى أصغر عنصر من المجموعة M بالمضاعف المشترك الأصغر للعددین a و b .

ونرمز له بـ $PPCM(a; b)$

* خواص

- a و b عددین طبيعيين غير معدومين ، فإن :

$$PPCM(ka; kb) = k \times PPCM(a; b) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

- a و b عددین طبيعيين غير معدومين فإن :

$$PPCM(a; b) = PPCM(b; a)$$

- إذا كان a يقسم b فإن : $PPCM(a; b) = b$

- إذا كان a و b أوليان فيما بينهما فإن $PPCM(a; b) = ab$

* المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية

نحلل هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية ثم نحسب جداء

العوامل المشتركة وغير المشتركة على أن نأخذ كل عامل

مرة واحدة وبأكبر أس .

(5) العلاقة بين $PGCD$ و $PPCM$ لعددین طبيعيين

جداء عددین طبيعيين a و b هو مساوي لجداء قاسمهما

المشترك الأكبر ومضاعفهما الأصغر أي :

$$PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$$

(6) الأعداد الأولية

تعريف:

العدد الأولي هو عدد طبيعي يقبل القسمة على 1 وعلى نفسه

* خواص

- كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .

- كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر من 1 يقبل قاسما أوليا

$$a \leq \sqrt{n} \text{ حيث } a$$

* ملاحظة :

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر من 1 أولي أم لا ، نحسب \sqrt{n}

نقسم العدد n على العداد الأولية الأصغر من \sqrt{n} على الترتيب:

- إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقر بأن العدد n غير أولي.

- إذا كانت كل البواقي غير معدومة فيكون العدد n أولي .

(7) مبرهنة بيزو

يكون العدان الصحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط

$$au + bv = 1 \text{ حيث } u \text{ و } v \text{ صحيحان}$$

* خواص

- إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b

فإنه يوجد عدان صحيحان u و v

$$\text{حيث } au + bv = d .$$

- إذا كان a عدد أولي فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها

- إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي

مع جداولهما $b \times c$

(8) مبرهنة غوص

a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء $b \times c$ وكان a أولي مع b فإن a يقسم c

* خواص

- a و b عدان طبيعيين غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو يقسم b .

- a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة . إذا كان a يقبل

القسمة على كل من العددين b و c وكان b و c أوليان فيما

بينهما فإن a يقبل القسمة على الجداء $b \times c$.

(9) التعداد

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 و a عدد طبيعي .

إذا كان $a > x$ فإن a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + \dots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$$

حيث $r_n \neq 0$ و $0 \leq r_i < x$ مع $i \in [0; n]$

تمارين محلولة

تمرين 1

(1) عين $PGCD(2800; 8225)$ ثم استنتج مجموعة القواسم

المشتركة للعددين 2800 و 8225 .

(2) أوجد عدد حقيقي x إذا علمت أن باقي قسمة 2840 على x هو 40 وباقي قسمة 8240 على x هو 15.

الحل

$$8225 = 2800 \times 2 + 2625$$

$$2800 = 2625 + 175$$

$$2625 = 175 \times 15 + 0$$

حسب خوارزمية أقليدس فإن : $PGCD(8225; 2800) = 175$.

بما أن $175 = 5^2 \times 7$ فإن عدد قواسم 175 هو $6 = (1+1)(2+1)$

وهي : $\{1, 5, 7, 25, 35, 175\}$.

(2) العدد الطبيعي x الذي نبحث عنه يجب أن يكون أكبر من 40 لأن القاسم x يكون أكبر من الباقي .

لدينا : $2840 = kx + 40$ و $8240 = k'x + 15$ حيث

$(k; k') \in \mathbb{N}^{*2}$ ومنه $2800 = kx$ و $8225 = k'x$ وهذا يعني

أن x هو قاسم مشترك للعددين 2800 و 8225 و x أكبر من 40 ومن السؤال الأول نستنتج أن $x = 175$

تمرين 2

(1) إذا كان باقي قسمة العدد الطبيعي a على b هو $(b-1)$ فما هو

باقي قسمة العدد $(a+1)$ على b .

(2) أوجد أصغر عدد طبيعي x الذي إذا قسم على 45، 35، 46 تكون بواقي هذه القسمة 44، 34، 45 على الترتيب .

الحل

(1) لدينا $a = kb + (b-1)$ ومنه $a+1 = kb + b = (k+1)b$

وهذا يعني أن العدد $(a+1)$ هو مضاعف للعدد b ومنه باقي قسمة

العدد $(a+1)$ على b هو 0 .

(2) لدينا : $x = 46k + 45 = 35k' + 34 = 45k'' + 44$ ومنه $x+1 = 46(k+1) = 35(k'+1) = 45(k''+1)$

$(x+1)$ هو مضاعف مشترك للأعداد 46، 35، 45 وبما أن

المطلوب هو أصغر عدد فيكون $(x+1)$ هو المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد .

$$45 = 3^2 \times 5 , 46 = 23 \times 2 , 35 = 5 \times 7$$

$$PPCM(46, 45, 35) = 2 \times 23 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 14490$$

ويكون $x = 14489$.

تمرين 3

(1) حاصل قسمة عدد طبيعي n على 37 هو q والباقي هو q^2 .

ماهي القيم الممكنة للعدد n ؟ (2) باقي قسمة العدد x على

35 هو 20 وباقي قسمته على 18 هو 12 .
أوجد x إذا علمت أن حاصل قسمة x على 18 هو ضعف حاصل
قسمته على 35.

الحل

$$(1) \text{ لدينا : } \begin{cases} n = 37q + q^2 \\ 0 < q^2 < 37 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} n = 37q + q^2 \\ 0 < q < 7 \end{cases} \text{ إذن :}$$

$n = 37q + q^2$ و $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ومنه القيم الممكنة للعدد n
هي : $\{38, 78, 120, 164, 210, 258\}$.

$$(2) \quad x = 35k + 20 \text{ و } x = 18k' + 12 \text{ و } k' = 2k \text{ ومنه}$$

$$x = 35k + 20 \text{ و } x = 36k + 12 \text{ و } k' = 2k \text{ ومنه}$$

$$36k + 12 = 35k + 20 \text{ ومنه } k = 8$$

ويكون : $x = 35k + 20 = 35 \times 8 + 20 = 300$

تمرين 4

عين الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ في الحالات الآتية :

$$(1) \quad a^2 - b^2 = 15 \quad (2) \quad a^2 - 4b^2 = 32$$

$$(3) \quad ab - 4b - 12 = 0 \text{ و } b > a$$

الحل

$$(1) \quad a^2 - b^2 = 15$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 15 \times 1 = 5 \times 3 \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases} (**) \text{ وإما } \begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 1 \end{cases} (*)$$

الجملة (*) تقبل كحل الثنائية $(a; b) = (8; 7)$ والجملة (**) تقبل

كحل الثنائية $(a; b) = (4; 1)$. الثنائيات $(8; 7)$ و $(4; 1)$

$$\text{تحقق } a^2 - b^2 = 15$$

$$(2) \quad a^2 - 4b^2 = 32$$

ومنه : $(a+2b)(a-2b) = 32 \times 1 = 16 \times 2 = 8 \times 4$ ومنه

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ a - 2b = 4 \end{cases} (*) \text{ إما } \begin{cases} a + 2b = 16 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \text{ إما } \begin{cases} a + 2b = 32 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

الجملتين الأولويتين ليس لهما حلول في \mathbb{N} أما الجملة (*) تقبل كل
الثنائيات $(a; b) = (6; 1)$.

$$(3) \quad ab - b - 12 = 0 \text{ ومنه : } b(a-1) = 12 \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} b = 4 \\ a - 1 = 3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = 6 \\ a - 1 = 2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = 12 \\ a - 1 = 1 \end{cases}$$

الثنائيات $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ المطلوبة هي : $(2; 12), (3; 6)$.

تمرين 5

(1) برهن أن العددين $a = 9n + 4$ و $b = 2n + 1$ هما أوليان فيما

بينهما . (2) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين

$$a = 9n + 4 \text{ و } c = 2n - 1$$

الحل

(1) a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v حيث : $au + bv = 1$ (مبرهنة بيزو) .

$au + bv = 1$ ومنه $u(9n+4) + v(2n+1) = 1$ ومنه

$$(9u+2v)n + 4u + v = 1 \quad \text{ومنه} \quad 9u+2v=0 \quad \text{و} \quad 4u+v=1$$

ومنه $u = -2$ و $v = 9$ ، بما أن $(-2)a + (+9)b = 1$ حسب

مبرهنة بيزو فالعددين a و b أوليان فيما بينهما .

(2) ليكن d قاسم مشترك للعددين $a = 9n+4$ و $c = 2n-1$ ومنه d هو أيضا قاسم للعددين $2a$ و $9c$ ومنه d يقسم أيضا $2a - 9c$ أي d يقسم 17 إذن $d = 1$ أو $d = 17$.

تمرين 6

n عدد طبيعي غير معدوم . a, b, c أعداد طبيعية حيث :

$$a = 2n+1, \quad b = n+1, \quad c = 2n$$

(1) برهن أن العددين a و b هما أوليان فيما بينهما ثم استنتج

$$PGCD(a; bc) = 1 \quad (2) \quad \text{عين} \quad PPCM(a; bc)$$

الحل

(1) نلاحظ أن : $(-1)(2n+1) + (+2)(n+1) = 1$ حسب مبرهنة

بيزو فالعددين $a = 2n+1$ و $b = n+1$ هما أوليان فيما بينهما .

$a = 2n+1$ و $c = 2n$ عدنان متتاليان فهما أوليان فيما بينهما .

بما أن a أولي مع b و a أولي مع c فيكون a أولي مع الجداء $b c$

ومنه $PGCD(a; bc) = 1$

(2) نعلم أن المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين أوليان فيما بينهما يساوي جداؤهما ومنه

$$PPCM(a; bc) = abc = 2n(2n+1)(n+1)$$

تمرين 7

عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ حيث :

$$PGCD(a; b) = 5 \quad \text{و} \quad PPCM(a; b) = 8160$$

$$(a > 5 \quad \text{و} \quad b > 5)$$

الحل

نضع $a = 5a'$ و $b = 5b'$ حيث : $PGCD(a'; b') = 1$

$$PPCM(a; b) = PPCM(5a'; 5b') = 5PPCM(a'; b')$$

بما أن $PGCD(a'; b') = 1$ فإن : $PPCM(a'; b') = a' \times b'$

$$\text{ومنه} \quad PPCM(a; b) = 5PPCM(a'; b') = 5a'b' = 8160$$

إذن $a'b' = 1632$ و $PGCD(a'; b') = 1$. نلاحظ أن :

$$(a'; b') \in \{(32; 51), (51; 32)\} \quad \text{ومنه} \quad (1632 = 2^5 \times 51)$$

$$\text{ومنه} \quad (a; b) \in \{(160; 255), (255; 160)\}$$

تمرين 8

عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$\begin{cases} a' + b' = 45 \\ a' - b' = 1 \end{cases} (*)$$

$$\begin{cases} a' + b' = 15 \\ a' - b' = 3 \end{cases} (**)$$

$$\begin{cases} a' + b' = 9 \\ a' - b' = 5 \end{cases} (***)$$

حل الجملة (*) هو : $a' = 23$ و $b' = 22$.

حل الجملة (**) هو : $a' = 9$ و $b' = 6$ وهو حل مرفوض

لأن $PGCD(a'; b') \neq 1$.

حل الجملة (***) هو : $a' = 7$ و $b' = 2$.

إذن الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق الجملة (2) هي :

$$(a; b) \in \{(69; 66), (21; 6)\}$$

تمرين 9

عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$(1) \begin{cases} d + m = 156 \\ m = d^2 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} m = 210d \\ a - b = d \end{cases}$$

حيث : $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$

الحل

$$d = 12 \text{ ومنه } d^2 + d - 156 = 0 \text{ ومنه } (1) \begin{cases} d + m = 156 \\ m = d^2 \end{cases}$$

بوضع $a = 12a'$ و $b = 12b'$ ونعلم أن : $m = da'b' = 12a'b'$ وبتعويض في الجملة (1) وتبسيطها نجد :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases} (2), \quad \begin{cases} d = 32 \\ m = 288 \end{cases} (1)$$

حيث : $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

الحل

نضع : $a = da'$ و $b = db'$ حيث $PGCD(a'; b') = 1$

في الجملة (1) لدينا $d = 32$

$$(1) \begin{cases} d = 32 \\ m = 288 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d = 32 \\ 32a'b' = 288 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d = 32 \\ a'b' = 9 \end{cases}$$

ومنه $(a'; b') \in \{(1; 9), (9; 1)\}$ ومنه

($a = 32$ و $b = 32 \times 9 = 288$) أو ($a = 288$ و $b = 32$)

$$(2) \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases} \text{ نعلم أن :}$$

$$PGCD(a; b) = d = \frac{a \times b}{PPCM(a; b)} = \frac{a \times b}{m} = 3$$

ومنه بوضع $a = 3a'$ و $b = 3b'$ حيث $PGCD(a'; b') = 1$

وبتعويض في الجملة (2) وتبسيطها نجد :

$$\begin{cases} a'^2 - b'^2 = (a' + b')(a' - b') = 45 = 45 \times 1 = 15 \times 3 = 9 \times 5 \\ d = 3, \quad PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} d(a'b' + 11) = 203 \\ a' > b' \end{cases} \text{ وبتعويض في الجملة (1) نحصل على}$$

إذن d يقسم 203 ومنه $d \in \{1, 7, 29, 203\}$.

$$\text{إذا كان } d = 1 \text{ فإن : } \begin{cases} a'b' = 192 \\ a' > b' \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$(b' = b = 3 \text{ و } a' = a = 64) \text{ أو } (b' = b = 1 \text{ و } a' = a = 192)$$

$$\text{إذا كان } d = 7 \text{ فإن : } \begin{cases} a'b' = 18 \\ a' > b' \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$(a'; b') \in \{(18; 1), (9; 2)\} \text{ ومنه}$$

$$(a; b) \in \{(126; 7), (63; 14)\}$$

إذا كان $d = 29$ أو $d = 203$ فإن $a'b' < 0$ (حالة مرفوضة)

$$(2) \quad m^2 - 3d^2 = 96$$

لدينا $m = da'b'$ و $PGCD(a'; b') = 1$

$$\text{ومنه } d^2(a'^2b'^2 - 3) = d^2((a'b')^2 - 3) = 96$$

ومنه d^2 يقسم 96 ولدينا : $96 = 2^5 \times 3 = 4^2 \times 6 = 2^2 \times 24$
الأعداد التي مربعاتها تقسم 96 هي : 2 و 4 ومنه $d = 2$ أو $d = 4$

$$\text{إذا كان } d = 2 \text{ فإن } (a'b')^2 = 27$$

(حالة مرفوضة لأن $a'b' \notin \mathbb{N}$).

$$\text{إذا كان } d = 4 \text{ فإن : } (a'b')^2 = 9 \text{ ومنه } a'b' = 3$$

ومنه :

$$\begin{cases} a'b' + 1 = 13 \\ a'b' = 12 \end{cases}, PGCD(a'; b') = 1$$

ومنه $(b' = 3 \text{ و } a' = 4)$ أو $(b' = 4 \text{ و } a' = 3)$
أو $(b' = 1 \text{ و } a' = 12)$ أو $(b' = 12 \text{ و } a' = 1)$ ومنه الثنائيات
المطلوبة هي :

$$(a; b) \in \{(36; 48), (48; 36), (144; 12), (12; 144)\}$$

$$(2) \begin{cases} m = 210d \\ a - b = d \end{cases} \text{ بوضع } a = da' \text{ و } b = db'$$

و $m = da'b'$ حيث $PGCD(a'; b') = 1$ وبتعويض في الجملة (2)

$$\text{نحصل } \begin{cases} a'b' = 210 \\ a' - b' = 1 \end{cases} \text{ لدينا } 15 \times 14 = 210 \text{ و } 15 - 14 = 1 \text{ إذن :}$$

$$a' = 15 \text{ و } b' = 14 \text{ ومنه } a = 15d \text{ و } b = 14d \text{ حيث } d \in \mathbb{N}^*$$

تمرين 10

عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق ما يلي :

$$(1) \begin{cases} m + 11d = 203 \\ a > b \end{cases}, \quad (2) \quad m^2 - 3d^2 = 96$$

حيث : $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$

الحل

$$(1) \begin{cases} m + 11d = 203 \\ a > b \end{cases} \text{ ومنه بوضع } a = da' \text{ و } b = db'$$

نعلم أن : $PPCM(a; b) = da'b'$ و $PGCD(a'; b') = 1$

$$(a'; b') \in \{(1; 3), (3; 1)\} \text{ ومنه } (a; b) \in \{(4; 12), (12; 4)\}.$$

تمرين 11

- (1) أثبت أن العددين 108 و 547 أوليان فيما بينهما .
 (2) أوجد عددين صحيحين p و k حيث $108p + 547k = 1$
 (3) أوجد العدد الطبيعي n الذي قواسمه 10 و $100 < n < 200$

الحل

- (1) باستعمال خوارزمية إقليدس
 $108 = 7 \times 15 + 3$ ، $547 = 108 \times 5 + 7$
 $7 = 3 \times 2 + 1$ ومنه $PGCD(547; 108) = 1$
 فالعددين 547 و 108 هما أوليان فيما بينهما
 (2) $547 = 108 \times 5 + 7$ ومنه $7 = 547 - 108 \times 5$
 $108 = 7 \times 15 + 3$ ومنه
 $3 = 108 - 7 \times 15 = 108 - (547 - 5 \times 108) \times 15 =$
 $= 76 \times 108 - 15 \times 547$
 $7 = 3 \times 2 + 1$ ومنه
 $1 = 7 - 3 \times 2 = (547 - 5 \times 108) - (76 \times 108 - 15 \times 547) \times 2 =$
 $= 31 \times 547 - 157 \times 108$
 إذن $108 \times (-157) + 547 \times (+31) = 1$
 ومنه $p = -157$ و $k = +31$.
 (3) الأعداد الطبيعية التي عدد قواسمها 10 هي :
 $2^9 = 512$ ، $2^4 \times 3 = 48$ ، $2 \times 3^4 = 162$
 بما أن العدد الطبيعي n المطلوب يكون محصور بين 100 و 200
 فيكون العدد n هو 162.

تمرين 12

- (1) برهن بأن العدد 503 هو عدد أولي .
 (2) عين الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ حيث $a^2 = b^2 + 503$
 (3) نعتبر في \mathbb{N}^2 المعادلة : $(*) \quad 13x - 15y = 1$.
 باستعمال خوارزمية إقليدس عين حل خاص للمعادلة $(*)$ ثم استنتج
 مجموعة حلولها .

الحل

- (1) يكون العدد الطبيعي n عدد أولي إذا كان لا يقبل القسمة على كل
 الأعداد الأولية الأصغر من \sqrt{n} . العدد 503 لا يقبل القسمة على
 الأعداد الأولية : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 التي هي أصغر
 من $\sqrt{503}$ فهو عدد أولي .
 (2) $a^2 = b^2 + 503$ ومنه $a^2 - b^2 = 503$ ومنه
 $(a + b)(a - b) = 503 \times 1$
 ومنه $\begin{cases} a + b = 503 \\ a - b = 1 \end{cases}$ ومنه $(a; b) = (252; 251)$
 (3) $15 = 13 \times 1 + 2$ ومنه $2 = 15 - 13$
 $13 = 2 \times 6 + 1$ ومنه
 $1 = 13 - 2 \times 6 = 13 - (15 - 13) \times 6 = 13 \times 7 - 6 \times 15$
 بما أن $13 \times 7 - 15 \times 6 = 1$ فالزوج $(7; 6)$ يعتبر حل للمعادلة $(*)$.
 لدينا $(*) \quad 13x - 15y = 1$ و $13 \times 7 - 15 \times 6 = 1$ $(**)$
 بطرح $(**)$ من $(*)$ نجد : $13(x - 7) - 15(y - 6) = 0$

ومنه $13(x-7) = 15(y-6) \oplus$ 13 يقسم $13(x-7)$.

ومنه 13 يقسم $15(y-6)$ وبما أن 13 أولي مع 15 فإن

13 يقسم $(y-6)$ ومنه $y-6 = 13k$ ومنه $y = 13k + 6$

وبالتعويض في المعادلة \oplus نجد : $x = 15k + 7$.

إذن حلول المعادلة (*) هي : $x = 15k + 7$ و $y = 13k + 6$

تمرين 13

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $7x - 5y = 100$.

(1) برهن أنه إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (1) فإن x من مضاعفات 5.

(2) أوجد حل خاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ثم استنتج مجموع حلولها

(3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y) \in \mathbb{N}^2$

وحل للمعادلة (1) . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

(4) حل في \mathbb{N}^2 الجملة :
$$\begin{cases} 7x - 5y = 100 \\ PGCD(x; y) = 100 \end{cases}$$

الحل

(1) لدينا $7x - 5y = 100$ ومنه $7x = 5(y + 20)$ ومنه 5 تقسم $7x$

والعدد 5 أولي مع 7 ، حسب مبرهنة غوص فالعدد 5 يقسم x .

(2) الثنائية : $(x_0; y_0) = (5; -13)$ هي حل خاص للمعادلة (1) .

لدينا $7x - 5y = 100$ و $7 \times 5 - 5 \times (-13) = 100$ وبطرحهما نجد

$$7(x-5) - 5(y+13) = 0$$

(*) $7(x-5) = 5(y+13)$ ومنه 7 يقسم $7(x-5)$ ومنه

7 يقسم $5(y+13)$ وبما أن 7 أولي مع 5 فإن 7 يقسم $(y+13)$

ومنه $y+13 = 7k$ ومنه $y = 7k - 13$.

وبتعويض في المعادلة (*) نجد $x = 5k + 5$. إذن حلول

المعادلة (1) هي : $x = 5k + 5$ و $y = 7k - 13$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(3) بوضع $x = dx'$ و $y = dy'$ حيث $PGCD(x; y) = d$

وبتعويض في المعادلة (1) نجد : $d(7x' - 5y') = 100$

ومنه d يقسم 100 إذن $d \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

$$(*) \begin{cases} 7x' - 5y' = 1 \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 7x - 5y = 100 \\ PGCD(x; y) = 100 \end{cases} \quad (4)$$

نلاحظ أن الثنائية (3; 4) هي حل للجملة * ومنه

$$7x' - 5y' = 1 \text{ و } 7 \times 3 - 5 \times 4 = 1 \text{ وبطرحهما نجد}$$

$$\oplus 7(x' - 3) = 5(y' - 4) \text{ ومنه } 7(x' - 3) - 5(y' - 4) = 0$$

7 يقسم $7(x' - 3)$ ومنه 7 يقسم $5(y' - 4)$ ، وبما أن 7 أولي مع 5

فإن 7 يقسم $y' - 4$ ومنه $y' = 7k + 4$ وبتعويض في \oplus

نجد $x' = 5k + 3$. إذن حلول الجملة المطلوبة هي :

$$x = 100(5k + 3) \text{ و } y = 100(7k + 4) \text{ حيث } k \in \mathbb{N} .$$

تمرين 14

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (*) $324x - 245y = 7$.

(1) نفرض أن $(x; y)$ حل للمعادلة (*) أثبت أن x مضاعف للعدد 7.

(2) أوجد حل خاص للمعادلة (*) ثم استنتج مجموعة حلولها .

(3) نضع $PGCD(x; y) = d$ ماهي القيم الممكنة لـ d ؟

(4) عين الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة (*) بحيث

يكون x أولي مع y .

الحل

$$(1) (*) \quad 324x - 245y = 7 \quad \text{ومنه} \quad 324x = 7(35y + 1)$$

ومنه 7 يقسم $324x$ و 7 أولي مع 324 ومنه 7 يقسم x أي
 x من مضاعفات 7 . (2) نعطي قيم لـ x من مضاعفات 7 ونعين العدد
 الصحيح y وبالتالي نستنتج الحل الخاص $(x_0; y_0) = (28; 37)$

$$\text{لدينا} \quad 324x - 245y = 7 \quad \text{و} \quad 324 \times 28 - 245 \times 37 = 7$$

$$\text{وبطرحهما نجد} \quad 324(x - 28) - 245(y - 37) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$(E) \quad 324(x - 28) = 245(y - 37)$$

بما أن 324 تقسم $324(x - 28)$ فإن 324 تقسم $245(y - 37)$.
 بما أن 324 أولي مع 245 فإن 324 تقسم $y - 37$ ومنه

$$y = 324k + 37 \quad \text{وبالتعويض في (E) نجد} \quad x = 245k + 28$$

إذن حلول المعادلة (*) هي : $x = 245k + 28$ و $y = 324k + 37$

(3) بوضع $x = dx'$ و $y = dy'$ وبالتعويض في (*) نجد

$$d(324x' - 245y') = 7 \quad \text{ومنه} \quad d \text{ يقسم } 7 \text{ أي } d = 1 \text{ أو } d = 7 .$$

(4) لدينا x من مضاعفات 7 ومنه إذا كان y من مضاعفات 7 يكون $d = 7$
 إذن x أولي مع y ($d = 1$) لما y ليس من مضاعفات 7 .

$$y = 324k + 37 = 7(46k + 5) + 2(k + 1) \quad \text{ومنه يكون } y \text{ ليس}$$

من مضاعفات 7 لما $k + 1 \neq 7p$ ومنه $k \neq 7p - 1$ ($p \in \mathbb{N}$)

إذن الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ المطلوبة هي :

$$x = 245k + 28 \quad \text{و} \quad y = 324k + 37 \quad \text{مع} \quad k \neq (7p - 1) .$$

تمرين 15

(1) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 4125 و 7125 ثم استنتج
 مجموعة قواسم المشتركة لهذين العددين .

(2) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $7125x - 4125y = \alpha$.

عين العدد الصحيح α لكي المعادلة (1) تقبل حلول في \mathbb{Z}^2 .

(3) نفرض أن $\alpha = 3000$. (أ) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) .

(ب) عين الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ وحل للمعادلة (1)

حيث : $-21 \leq x \leq 34$.

$$(4) \text{ حل في } \mathbb{N}^2 \text{ الجملة : } \begin{cases} 19x - 11y = 8 \\ PGCD(x; y) = 8 \end{cases}$$

الحل

$$(1) \quad 7125 = 4125 \times 1 + 3000 \quad , \quad 4125 = 3000 \times 1 + 1125$$

$$3000 = 1125 \times 2 + 750 \quad , \quad 1125 = 750 \times 1 + 375$$

$$750 = 375 \times 2 + 0$$

حسب خوارزمية أقليدس فالقاسم المشترك الأكبر للعددين
 7125 و 4125 هو 375 . وتكون مجموعة القواسم المشتركة
 للعددين 7125 و 4125 هي مجموعة قواسم 375 وهي :

$$1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, 375.$$

(2) المعادلة (1) تقبل حلول في \mathbb{Z}^2 إذا كان α من مضاعفات 375.

(3) إذا كان $\alpha = 3000$ فالمعادلة (1) تصبح (*) $19x - 11y = 8$.

(أ) نلاحظ أن الثانية (1;1) هي حل خاص للمعادلة (*) ومنه لدينا

$$(*) \quad 19x - 11y = 8 \quad \text{و} \quad (.) \quad 19 \times 1 - 11 \times 1 = 8 \quad \text{وبطرح}$$

$$(.) \quad \text{من المعادلة} \quad (*) \quad \text{نجد} \quad 19(x-1) - 11(y-1) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\oplus \quad 19(x-1) = 11(y-1) \quad \text{نقسم} \quad 19 \quad \text{بـ} \quad 19(x-1) \quad \text{ومنه}$$

$$19 \quad \text{نقسم} \quad 11(y-1) \quad \text{وبما أن} \quad 19 \quad \text{أولي مع} \quad 11 \quad \text{فإن} \quad 19 \quad \text{نقسم}$$

$$(y-1) \quad \text{ومنه} \quad y = 19k + 1 \quad \text{وبتعويض في المعادلة} \quad \oplus$$

$$\text{نجد} \quad x = 11k + 1 \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(ب) \quad -21 \leq x \leq 34 \quad \text{ومنه} \quad -21 \leq 11k + 1 \leq 34 \quad \text{ومنه}$$

$$-2 \leq k \leq 3 \quad \text{و} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{إن} \quad k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

ومنه مجموعة الثنائيات $(x; y)$ المطلوبة هي :

$$\{(-21; -37), (-10; -18), (1; 1), (12; 20), (23; 39), (34; 58)\}$$

(4) بوضع $x = 8x'$ و $y = 8y'$ وتعويض في الجملة المعطاة

$$(*) \quad \begin{cases} 19x' - 11y' = 1 \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} 19x - 11y = 8 \\ PGCD(x; y) = 8 \end{cases}$$

نلاحظ أن $(x_0; y_0) = (-4; -7)$ هو حل خاص للجملة (*).

$$\text{لدينا} \quad 19x' - 11y' = 1 \quad \text{و} \quad 19 \times (-4) - 11 \times (-7) = 1 \quad \text{ومنه}$$

$$\text{بالطرح نجد} \quad 19(x' + 4) - 11(y' + 7) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$19(x' + 4) = 11(y' + 7) \quad \text{وبتطبيق الطريقة التي استعملت في}$$

التمارين السابقة نجد $x' = 11k - 4$ و $y' = 19k - 7$ ومنه

$$x = 8(19k - 4) \quad \text{و} \quad y = 8(19k - 7) \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

تمرين 16

(1) أثبت أن العددين 993 و 170 أوليان فيما بينهما .

(2) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $993x - 170y = 143$

أ- عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ بحيث $x_0 + y_0 = 6$

ب - حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1).

(3) أوجد أصغر عدد طبيعي a بحيث باقي قسمة العدد $(a - 1)$ على

كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب .

الحل

$$(1) \quad 993 = 170 \times 3 + 43, \quad 170 = 143 \times 1 + 27$$

$$143 = 27 \times 5 + 8, \quad 27 = 8 \times 3 + 3$$

$$8 = 3 \times 2 + 2, \quad 3 = 2 \times 1 + 1$$

بما أن $PGCD(993; 170) = 1$ فالعددين 993 و 170 هما أوليان

فيما بينهما .

$$(2) \quad \begin{cases} 993x_0 - 170y_0 = 143 \\ 170x_0 + 170y_0 = 6 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} 993x_0 - 170y_0 = 143 \\ x_0 + y_0 = 6 \end{cases}$$

بجمع معادلتى الجملة الثانية نجد $1163x_0 = 1163$ ومنه $x_0 = 1$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين للجملة الأولى نجد $y_0 = 5$.

(ب) لدينا $993x - 170y = 143 \oplus$ و $993 \times 1 - 170 \times 5 = 143 *$

بطرح * من المعادلة \oplus نجد $993(x-1) - 170(y-5) = 0$

ومنه $993(x-1) = 170(y-5)$ وباستعمال الطريقة التي

استعملت في التمارين السابقة نجد :

$$x = 170k + 1 \text{ و } y = 993k + 5 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

(3) حسب المعطيات فإن : $a - 1 = 1986m + 14 = 340n + 300$

ومنه بعد التبسيط نجد $993m - 170n = 143$ حيث $(m; n) \in \mathbb{N}^2$

وحسب السؤال السابق فإن حلول هذه المعادلة هي :

$$m = 170k + 1 \text{ و } n = 993k + 5$$

لدينا $a - 1 = 340n + 300$ ومنه

$$a = 340(993k + 5) + 300 + 1$$

a من أجل $k = 0$ وهي : $a = 340 \times 5 + 301 = 2001$

تمرين 17

$$a = 2n - 1, \quad b = 9n + 1, \quad c = 2n(5n - 1)$$

طبيعية حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) برهن أن كل قاسم للعددين a و b هو قاسم للعدد 11.

(2) عين العدد الطبيعي n لكي $PGCD(a; b) = 11$.

(3) برهن بأن العددين a و c هما أوليان فيما بينهما .

الحل

(1) ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b ومنه d يقسم $9a$ و $2b$

و d يقسم أيضا $(2b - 9a)$ أي يقسم 11 .

$$2b - 9a = 2(9n + 1) - 9(2n - 1) = 9n + 1$$

$$2b - 9a = 2(n + 5) - 11$$

حسب خوارزمية أقليدس فإن :

$$PGCD(a; b) = PGCD(n + 5; 11)$$

يكون $PGCD(n + 5; 11) = 11$ إذا كان $n + 5 = 11k$ ($k \in \mathbb{N}$)

ومنه $n = 11k - 5$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

(3) نعلم أن $PGCD(2n; 2n - 1) = 1$ لأنهما عددين متتالين .

$$(-5)(2n - 1) + (+2)(5n - 2) = 1$$

فالعدين $(2n - 1)$ و $(5n - 2)$ هما أوليان فيما بينهما .

العدد $a = (2n - 1)$ أولي مع كل من $2n$ و $(5n - 2)$ فهو أولي مع

جداؤهما $2n(5n - 2) = c$. إذن a و c أوليان فيما بينهما .

تمرين 18

$a = 2n^2 + 5n + 8$ و $b = n + 1$ عددين طبيعيين ($n \in \mathbb{N}$) .

(1) تحقق أن : $2n^2 + 5n + 8 = (2n + 3)(n + 1) + 5$

(2) ناقش تبعا لقيم العدد الطبيعي n قيم $PGCD(a; b)$

(3) عين قيم العدد الطبيعي n لكي b يقسم a

$$\begin{cases} PGCD(3n + 8; n + 1) = 5 \\ PPCM(3n + 8; n + 1) = 70 \end{cases}$$

(4) عين العدد n الذي يحقق :

الحل

$$(1) \quad (2n + 3)(n + 1) + 5 = 2n^2 + 5n + 8$$

(2) لدينا $a = (2n + 3)(n + 1) + 5 = (2n + 3)b + 5$ وحسب

خوارزمية أقليدس فإن $PGCD(a; b) = PGCD(n + 1; 5)$

يكون $PGCD(a; b) = 5$ إذا كان $n+1 = 5k$ ومنه $n = 5k - 1$.
يكون $PGCD(a; b) = 1$ إذا كان $n \neq 5k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) b يقسم a يعني $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ ومنه $\frac{2n^2 + 5n + 8}{n+1} \in \mathbb{N}$ ومنه

$$\left(2n+3 + \frac{5}{n+1}\right) \in \mathbb{N} \text{ ومنه } \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N} \text{ لأن } (2n+3) \in \mathbb{N}$$

$\frac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$ يعني $(n+1)$ يقسم 5 ومنه $n+1 = 1$ أو $n+1 = 5$
ومنه $n = 0$ أو $n = 4$.

(4) نعلم أن $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$ ومنه

$$PGCD(3n+8; n+1) \times PPCM(3n+8; n+1) = 3n^2 + 11n - 342 = 0 \text{ ومنه } (3n+8)(n+1) = 5 \times 70$$

$$\text{ومنه } n = 9 \in \mathbb{N} \text{ أو } n = \frac{-76}{6} \notin \mathbb{N}$$

إذن العدد الطبيعي n الذي يحقق الجملة المعطاة في (4) هو $n = 9$.

تمرين 19

a, b عددين طبيعيين حيث :

$$a = n^3 + 5n^2 + 7n + 24 \text{ و } b = n + 3 \text{ حيث } n \in \mathbb{N}$$

(1) برهن أن $PGCD(a; b) = PGCD(b; 21) = d$ واستنتج القيم الممكنة للعدد d .

(2) عين قيم n حتى يكون $PGCD(a; b) = 21$.

(3) عين العدد الطبيعي لكي يكون الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال.

الحل

$$(1) \quad n^3 + 5n^2 + 7n + 24 = (n+3)(n^2 + 2n + 1) + 21$$

حسب خوارزمية إقليدس فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; 21)$.
بما أن $PGCD(b; 21) = d$ فيكون d من قواسم 21 ومنه القيم الممكنة للعدد d هي : $d \in \{1, 3, 7, 21\}$.

(2) نعلم إن $PGCD(a; b) = PGCD(n+3; 21)$ ومنه يكون

$$PGCD(a; b) = 21 \text{ لما } n+3 = 21k \text{ ومنه}$$

$$n = 21k - 3 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \text{ يكون الكسر } \frac{a}{b} \text{ غير قابل للاختزال}$$

إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ ومنه d لا يأخذ القيم 3، 7، 21 إذن

مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال

هي : $n \in \mathbb{N}$ و $n \neq 21k - 3$ و $n \neq 7k - 3$ و $n \neq 3k - 3$.

تمرين 20

a, b, c, d أعداد طبيعية غير معدومة وتشكل بهذا الترتيب متتالية

هندسية أساسها q حيث $q > 1$ و $PCCD(a; q) = 1$.

عين a, b, c, d علما أن $10a^2 = d - b$.

الحل

لدينا من المعطيات $10a^2 = d - b$. نعلم أن $b = aq$ و $d = aq^3$ ومنه $10a^2 = aq(q^2 - 1)$ ومنه $10a = q(q^2 - 1)$.

بما أن $PCCD(a; q) = 1$ حسب مبرهنة غوص فإن q يقسم 10 وتكون القيم الممكنة للعدد q هي : 2 ، 5 ، 10 .

إذا كان $q = 2$ فإن $10a = 6$ ومنه $a = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

إذا كان $q = 5$ فإن $10a = 120$ ومنه $a = 12$ و $b = aq = 60$ و $c = bq = 300$ و $d = 1500$.

إذا كان $q = 10$ فإن $10a = 990$ ومنه $a = 99$ و $b = aq = 990$ و $c = bq = 9900$ و $d = cq = 99000$.

تمرين 21

لتكن الأعداد الطبيعية : $a = 4n + 1$ ، $b = 2n - 1$ ، $c = 3n + 1$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1- أ) أثبت أن العددين a و c أوليان فيما بينهما .

ب) استنتج أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $PGCD(12n^2 + 3n; 3n + 1) = 1$

2) عين قيم n حتى يكون العدد $\frac{a}{b}$ عنصرا من \mathbb{N}^* .

3) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

4) عين قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق :

$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 3 \\ PPCM(a; b) = 9 \end{cases}$$

الحل

1- أ) بما أن $(-3)(4n + 1) + (+4)(3n + 1) = 1$ حسب مبرهنة بيزو فالعددين a و c أوليان فيما بينهما .

ب) $12n^2 + 3n = 3n(4n + 1)$ ونعلم أن

$PGCD(3n; 3n + 1) = 1$ (عددين طبيعيين متتالين أوليان بينهما)

$PGCD(3n + 1; 4n + 1) = 1$ (سؤال سابق) .

$3n + 1$ أولي مع كل من $3n$ و $4n + 1$ فإن $3n + 1$ أولي مع الجداء $3n(4n + 1)$ ومنه $PGCD(12n^2 + 3n; 3n + 1) = 1$.

2) $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$ ومنه $\frac{4n + 1}{2n - 1} \in \mathbb{N}^*$ ومنه $\left(2 + \frac{3}{2n - 1}\right) \in \mathbb{N}^*$

ومنه $\frac{3}{2n - 1} \in \mathbb{N}$ ومنه $(2n - 1)$ يقسم 3 أي :

$(2n - 1) = 1$ أو $(2n - 1) = 3$ ومنه $n = 1$ أو $n = 2$.

3) $PGCD(a; b) = PGCD(2n - 1; 3) = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$ (3)

4) نعلم أن $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$ ومنه

$(4n + 1)(2n - 1) = 9 \times 3$ ومنه $8n^2 - 2n - 28 = 0$

ومنه $n = 2$ (مقبولة) أو $n = -\frac{7}{4} \notin \mathbb{N}$ (مرفوضة) .

تمرين 22

n عدد طبيعي . (1) عين العدد الطبيعي n حتى يكون الكسر

$$\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2}$$
 عددا طبيعيا . (2) عين قيم العدد الطبيعي n

من أجلها يكون الكسر $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2}$ غير قابل للاختزال.

(3) ماهي القيم الممكنة للعدد n حتى يكون n^2 يقسم 468؟

(4) حل في \mathbb{N} المعادلة : $2x^3 + x^2 - 468 = 0$.

الحل

(1) نعلم أن $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2} = 2n - 1 + \frac{5}{n + 2}$ ومنه يكون الكسر

$$\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2}$$
 عددا طبيعيا إذا كان $\frac{5}{n + 2} \in \mathbb{N}$ ومنه

$(n + 2)$ يقسم 5 ومنه $n + 2 = 1$ أو $n + 2 = 5$ ومنه $n = 3$.

(2) يكون الكسر $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2}$ غير قابل للاختزال إذا كان

$$PGCD(2n^2 + 3n + 3; n + 2) = 1$$
 ونعلم أن :

$$PGCD(2n^2 + 3n + 3; n + 2) = PGCD(n + 2; 5)$$
 ويكون

$$PGCD(n + 2; 5) = 1$$
 إذا كان $n + 2$ ليس من مضاعفات 5 أي

$$n + 2 \neq 5k \text{ ومنه } n \neq 5k - 2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

(3) $468 = 2^2 \times 3^2 \times 13$ ومنه قيم العدد الطبيعي n حتى يكون n^2

يقسم 468 هي 2، 3، 6 .

(4) $2x^3 + x^2 - 468 = 0$ ومنه $x^2(2x + 1) = 468$ ومنه x^2 ومنه x^2 يقسم 468 وحسب السؤال السابق فإن $x = 6$ يحقق المعادلة المعطاة .

تمرين 23

(1) a عدد طبيعي . أكتب العدد $(a + 1)^3$ في النظام ذي الأساس a .

(2) ليكن x عدد طبيعي يكتب في النظام العشري 2735.

أ- أكتب x في النظام ذي الأساس 7 .

ب- أكتب x في النظام ذي الأساس 12 .

الحل

(1) نعلم أن : $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

- إذا كان $a > 3$ فإن :

$$(a + 1)^3 = \overline{1331}$$

- إذا كان $a = 3$ فإن :

$$(a + 1)^3 = 64 = 2 \times 3^3 + 3^2 + 1 = \overline{2101}$$

- إذا كان $a = 2$ فإن :

$$(a + 1)^3 = 27 = 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = \overline{11011}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2735 & = & 390 \times 7 + \boxed{5} \\
 390 & = & 55 \times 7 + \boxed{5} \\
 55 & = & 7 \times 7 + \boxed{6} \\
 7 & = & 1 \times 7 + \boxed{0} \\
 1 & = & 0 \times 7 + \boxed{1}
 \end{array}
 \quad (2)$$

العدد 2735 يكتب في النظام ذي الأساس 7 : $\overline{10655}$
العدد 2735 يكتب في النظام ذي الأساس 12 : $\overline{16\beta\beta}$

تمرين 24

- (1) x عدد طبيعي يكتب $\overline{543}$ في النظام ذي الأساس 7.
أكتب x في النظام العشري .
(2) y عدد طبيعي يكتب $\overline{3662}$ في النظام ذي الأساس 7.
أكتب y في النظام ذي الأساس 12 .

الحل

العدد x يكتب في النظام العشري :

$$x = 5 \times 7^2 + 4 \times 7 + 3 = 276$$

(2) العدد y يكتب في النظام العشري :

$$y = 3 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 6 \times 7 + 2 = 1367$$

$$1367 = 113 \times 12 + \boxed{11} \quad \text{العدد } y \text{ يكتب } \overline{95\beta} \text{ في النظام}$$

ذي الأساس 12

$$113 = 9 \times 12 + \boxed{5}$$

$$9 = 0 \times 12 + \boxed{9}$$

تمرين 25

في نظام عد أساسه x مجهول يكتب عددا $\overline{230}$ و $\overline{3421}$ بينما يكتب مجموعهما $\overline{4201}$. عين الأساس x .

الحل

حسب تعريف نشر عدد طبيعي وفق أساس معين ، يجب أن يكون الأساس x أكبر تماما من العدد 4 . الأعداد $\overline{230}$ ، $\overline{3421}$ ، $\overline{4201}$ المكتوبة في النظام ذي الأساس x يكون نشرها :

$$\overline{3421} = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \quad , \quad \overline{230} = 2x^2 + 3x + 0$$

حسب المعطيات لدينا في النظام ذي الأساس x $\overline{4201} = 4x^3 + 2x^2 + 0x + 1$ ومنه $\overline{3421} + \overline{230} = \overline{4201}$ ومنه

$$(3x^3 + 4x^2 + 2x + 1) + (2x^2 + 3x) = 4x^3 + 2x^2 + 1$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \quad \text{ومنه} \quad x(x^2 - 4x - 5) = 0 \quad \text{ومنه} :$$

$$x = 0 \quad (\text{مرفوض}) \quad \text{أو} \quad x = 5 \quad (\text{مقبول}) \quad \text{أو} \quad x = 1 \quad (\text{مرفوض}) .$$

إذن الأساس x المطلوب هو 5 .

تمرين 26

x و y عددين طبيعيين غير معدومين . (1) أوجد الأعداد التي تكتب xy في النظام العشري و \overline{xy} في النظام ذي الأساس 7 .

الحل

(1) بما أن \overline{yx} هي كتابة الأعداد في النظام 7 ، فيكون حتما $x < 7$ و $y < 7$. الأعداد التي تكتب xy في النظام العشري يكون نشرها :

$10x + y$ والأعداد التي تكتب \overline{yx} في النظام ذي الأساس 7 يكون نشرها : $7y + x$ وحسب المعطيات لدينا $10x + y = 7y + x$ ومنه $3x = 2y$ و $(x < 7$ و $y < 7)$ ومنه $(x = 2, y = 3)$ أو $(x = 4, y = 6)$ ، إذن الأعداد المطلوبة هي : 23 ، 46 .

تمرين 27

ليكن n عددا طبيعيا يكتب $\overline{342u}$ في النظام ذو الأساس a .
- حدد u لكي يكون العدد n قابلا للقسمة
(1) على 5 من أجل $a = 6$.
(2) على 12 من أجل $a = 17$.

الحل

(1) من أجل $a = 6$ فإن :
 $n = 3 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 2 \times 6 + u = 804 + u$
ومنه : $n \equiv 804 + u \equiv 4 + u [5]$ ونعلم انه في النظام ذو الأساس 6 كل أرقام العدد تكون أقل من 6 ومنه يكون n قابلا للقسمة على 5 إذا كان : $\begin{cases} 4 + u \equiv 0 [5] \\ 0 \leq u \leq 5 \end{cases}$ إذن $\boxed{u = 1}$
(2) من أجل $a = 17$ فإن :
 $n = 3 \times 17^3 + 4 \times 17^2 + 2 \times 17 + u$
ونعلم ان : $17^3 \equiv 5 [12]$ ، $17^2 \equiv 1 [12]$ ، $17 \equiv 5 [12]$
ومنه : $n \equiv 3 \times 5 + 4 \times 1 + 2 \times 5 + u [12]$
أي : $n \equiv 5 + u [12]$ يكون العدد n قابلا للقسمة على 12

لما : $\begin{cases} 5 + u \equiv 0 [12] \\ 0 \leq u \leq 16 \end{cases}$ إذن $\boxed{u = 7}$

تمرين 28

ليكن n عددا طبيعيا يكتب $\overline{1x5y4}$ في النظام ذو الأساس 6 .
- أوجد جميع الأزواج $(x; y)$ من N^2 بحيث :
(1) n يقبل القسمة على 35 .
(2) n يقبل القسمة على 70 .

الحل

(1) لدينا : $n = 6^4 + 6^3x + 5 \times 6^2 + 6y + 4$
ونعلم ان : $6^4 \equiv 1 [35]$ ، $6^3 \equiv 6 [35]$ ، $6^2 \equiv 1 [35]$
ومنه : $n \equiv 6x + 6y + 10 [35]$ حيث : $0 \leq x \leq 5$ و $0 \leq y \leq 5$
 n يقبل القسمة على 35 يعني أن : $n \equiv 0 [35]$ ومنه :
 $6x + 6y + 10 \equiv 0 [35]$ ومنه : $6x + 6y \equiv -10 [35]$ ومنه :
 $3x + 3y \equiv -5 [35]$ ومنه : $3(x + y) \equiv 30 [35]$ ومنه :
 $x + y \equiv 10 [35]$ (لأن 3 أولي مع 35)
ومنه :
 $\begin{cases} x + y = 10 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$ ومنه الزوج الوحيد الذي يحقق هو $x = 5$ و $y = 5$
و يكون العدد n في النظام العشري :

$$n = 6^4 + 6^3 \times 5 + 5 \times 6^2 + 6 \times 5 + 4 = \boxed{2590}$$

(2) العدد 2590 عدد زوجي فهو يقبل القسمة على 2.
بما أن 2590 يقبل القسمة على 35 و يقبل القسمة على 2
و العددان أوليان فيما بينهما فإن 2590 يقبل القسمة على جدلتهما
 $35 \times 2 = 70$ (خواص نظرية غوص)
 $2590 = 70 \times 37$

تمرين 29

(1) عين عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n = 12x92y$
المكتوب في النظام العشري قابلا للقسمة على 9 و على 11.
(2) أكتب العدد n في النظام ذو الأساس 9 .

الحل

(1) لدينا $0 \leq x \leq 9$ و $0 \leq y \leq 9$
و $n = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + x \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 2 \times 10 + y$
ومنه: $[11] n \equiv -1 + 2 - x + 9 - 2 + y$
و $[9] n \equiv 1 + 2 + x + 9 + 2 + y$
أي: $[11] n \equiv -x + y + 8$ و $[9] n \equiv x + y + 5$
 $[11] n \equiv 0$ و $[9] n \equiv 0$ معناه:
 $-x + y + 8 \equiv 0 [11]$ و $x + y + 5 \equiv 0 [9]$
ومنه: $y - x \equiv -8 \equiv 3 [11]$ و $y + x \equiv -5 \equiv 4 [11]$
لدينا: $y - x \equiv 3 [11]$ ومنه:
 $(x; y) \in \{(4; 1), (5; 2), (6; 3), (7; 4), (8; 5), (9; 6)\}$

و بما أن $[11] y + x \equiv 4$ فإن: $(x; y) = (8; 5)$.
إذن العدد n هو: 125928 .
(2) العدد n يكتب 211660 في النظام ذو الأساس 9 .

تمرين 30

عين العدد n المؤلف من ثلاثة أرقام و الذي يكتب \overline{xyz} في النظام 7
و \overline{zyx} في النظام 11 .

الحل

لدينا $0 \leq x \leq 6$ و $0 \leq y \leq 6$ و $0 \leq z \leq 6$
و $n = z \times 11^2 + y \times 11 + x$ ، $n = x \times 7^2 + y \times 7 + z$
ومنه: $49x + 7y + z = 121z + 11y + x$
ومنه: $48x - 4y - 120z = 0$ ومنه: $12x - y - 30z = 0$
ومنه: $y = 12x - 30z$.
وبما أن $0 \leq y \leq 6$ فإن: $0 \leq 12x - 30z \leq 6$
أي $0 \leq 2x - 5z \leq 1$ والحل الوحيد الذي يحقق هذه المتراجحة هو:
 $x = 3$ و $z = 1$ و $y = 12x - 30z = 6$
فيكون العدد n هو: $n = 3 \times 49 + 6 \times 7 + 1 = \boxed{190}$.

تمارين مقترحة للحل

تمرين 1

عين الأزواج $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$(1) \begin{cases} a + b = 96 \\ PGCD(a; b) = 12 \end{cases}, (2) \begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 30 \end{cases}$$

تمرين 2

a, b عددين طبيعيين حيث :

$$PGCD(a; b) = d \text{ و } PPCM(a; b) = m$$

عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ في كل حالة من الحالات الآتية :

$$(1) \begin{cases} m - d = 108 \\ 10 < d < 15 \end{cases}, (2) \begin{cases} a - b = d \\ m = 400 \end{cases}, (3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 200 \\ 5m = ab \end{cases}$$

تمرين 3

(1) أوجد الأعداد الطبيعية التي مربعها يقسم 252.

(2) عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ التي تحقق $d^2 - m^2 = 252$

حيث $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$.

تمرين 4

a, b, α, β أعداد طبيعية.

نفرض أن $a = 9\alpha + 4\beta$ و $b = 2\alpha + \beta$.

(1) برهن أن $PGCD(a; b) = PGCD(\alpha; \beta)$

(2) برهن أن العددين $(9\alpha + 4)$ و $(2\alpha + 1)$ أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن $PGCD(18\alpha^2 + 19\alpha + 5; 9\alpha + 4) = 1$.

(3) ناقش تبعا لقيم α قيم القاسم المشترك الأكبر للعددين $(9\alpha + 4)$ و $(2\alpha - 1)$.

تمرين 5

(1) برهن أنه إذا كان x و y عددين طبيعيين أوليان فإن $(3x + 5y)$ و $(x + 2y)$ أوليان فيما بينهما.

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{N}^2 \text{ الجملة } \begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 672 \\ ab = 2m, m = PPCM(a; b) \end{cases}$$

تمرين 6

(1) عين قواسم العدد 5929.

(2) عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ بحيث يكون $PGCD(a; b)$ و $PPCM(a; b)$ هما جذري المعادلة $x^2 - 91x + 588 = 0$

تمرين 7

n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع $a = 5n + 4$ و $b = 2n - 1$.

(1) عين تبعا لقيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

(2) عين قيمة العدد الطبيعي n إذا كان :

$$PGCD(a; b) = 13 \text{ و } PPCM(a; b) = 507$$

تمرين 8

(1) عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث $(n + 2)$ يقسم $(2n - 1)$.

(2) برهن أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فالعددين $(n+2)$ و $n^2 + 3n - 1$ أوليان فيما بينهما .

(3) عين العدد الصحيح n لكي : $\frac{(2n^2 + 3n - 1)(2n - 1)}{n + 2} \in \mathbb{Z}$

تمرين 9

n عدد طبيعي . نضع $a = 2n + 3$ و $b = n + 5$.

(1) ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b)$ ؟

(2) عين الأعداد الطبيعية n والتي تحقق $PGCD(a; b) = 7$.

(3) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n لكي $\frac{2n + 3}{n + 5} \in \mathbb{Z}$.

تمرين 10

(1) عين مجموعة الأزواج $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ بحيث $(*) 2x - 5y = 4$.

(2) برهن أن إذا كان $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة $(*)$ فإن x و $(y + 1)$ أوليان فيما بينهما .

(3) عين مجموعة الأزواج $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ PGCD(x; y) = 4 \end{cases}$$

تمرين 11

نعتبر في \mathbb{N}^2 المعادلة : $(*) 13a - 35b = 420$.

(1) برهن أن إذا كان $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ حل للمعادلة $(*)$ فإن

a يقبل القسمة على 35 .

(2) استنتج حلول المعادلة $(*)$

(3) عين الأزواج $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة $(*)$ والتي

تحقق : $1 \leq b \leq 27$.

تمرين 12

نعتبر في \mathbb{N}^2 المعادلة : $(1) 35x - 29y = 7$.

(1) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حل خاص للمعادلة (1)

ثم حل هذه المعادلة . (2) نفرض أن $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ وحل

للمعادلة (1) و $PGCD(x; y) = d$ ، ماهي القيم الممكنة لـ d ؟

(3) عين الثنائيات $(x; y)$ التي تحقق (1) و $PGCD(x; y) = 7$.

تمرين 13

(1) عين مجموعة الأزواج $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ حلول المعادلة :

$(*) 5x - 4y = 2$. (2) نعتبر الأزواج $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ وحلول

المعادلة $(*)$ ، ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b)$ ؟

(3) برهن أنه يوجد زوج وحيد $(a; b)$ حل للمعادلة $(*)$ ويحقق :

$PGCD(a; b) = 2$ و $PPCM(a; b) = 60$.

تمرين 14

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(*) 11x + 32y = 1984$

(1) أثبت أنه من أجل كل زوج $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ وحل للمعادلة $(*)$ فإن

x يقبل القسمة على 32 . (2) استنتج مجموعة حلول المعادلة $(*)$

(3) عين الأزواج $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ التي هي حلول المعادلة (*) والتي تحقق : $-37 < y < 3$

تمرين 15

لتكن المعادلة (E) $11x + 3y = 65$ حيث $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

(1) عين الثنائية $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ التي هي حل للمعادلة (E) وتحقق

(2) $2x_0^2 - 3y_0 = 11$ استنتج حلول المعادلة (E).

(3) عين كل الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ حل للمعادلة (E) حيث $x > -5$ و $y > -5$.

تمرين 16

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (*) $8x + 9y = 214$.

(1) باستعمال خوارزمية أقليدس عين حل خاص $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$.

(2) حل المعادلة (*). (3) نفرض أن $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ وحل

للمعادلة (*) و $PGCD(x; y) = d$.

(أ) ماهي القيم الممكنة لـ d ؟

(ب) حل في \mathbb{N}^2 الجملة $\begin{cases} 8x + 9y = 214 \\ PGCD(x; y) = 2 \end{cases}$

(4) عين الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ وحل للمعادلة (*) وتحقق $xy \geq 0$.

تمرين 17

عين كل الأزواج $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق :

$$\begin{cases} m^2 + d^2 = 580 \\ ab = 96 \end{cases}, \begin{cases} m^2 - 5d^2 = 1980 \\ a > b \end{cases}, \begin{cases} a^2 - b^2 = 150 \\ 5m = ab \end{cases}$$

حيث : $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$.

تمرين 18

(u_n) متتالية حسابية معرفة على \mathbb{N} حيث $u_2 = 15$.

نضع : $m = PPCM(u_1; u_3)$ و $d = PGCD(u_1; u_3)$.

(1) احسب u_1, u_3 علما أن $m + d = 42$.

(2) احسب $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(3- أ) تحقق أن $2S_n$ من مضاعفات 3.

(ب) عين العدد الطبيعي n لكي $2S_n$ يقبل القسمة على 15.

تمرين 19

q, u_0 عددين طبيعيين غير معدومين.

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q .

(1) عين q و u_0 علما أن q أولي مع u_0 و $3u_0^2 = u_3 - u_1$.

(2) نفرض أن $u_0 = 8$ و $q = 3$. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ ، احسب S_n و P_n بدلالة n .

(3- أ) أدرس حسب قيم n بواقي قسمة العدد 3^n على 13.

(ب) عين العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون S_n مضاعف للعدد 13.

تمرين 20

(1) برهن بأن العددين 108 و 109 هما أوليان فيما بينهما.

(2) برهن بأن العدد 109 هو عدد أولي.

3- أ) عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 108.
 ب) عين كل الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ وتحقق $a^2 - b^2 = 108$.

تمرين 21

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (*) $19x + 13y = 1000$.

(1) عين حل خاص $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ حيث $3x_0^2 - y_0 + 62 = 0$ ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (*). (2) عين كل الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ والتي هي حل للمعادلة (*) وتحقق $xy > 0$.

(3) في نادي الثانوية مجموعة من التلاميذ والتلميذات صرفوا 1000 DA، فإذا صرف كل تلميذ 19 DA وكل تلميذة 13 DA فما هو عدد التلاميذ وعدد التلميذات؟

تمرين 22

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) $8x - 165y = 0$.

(1) عين كل الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ التي هي حلول المعادلة (E).
 علما أن الثنائية (124; 6) هي حل خاص للمعادلة (E).

(2) n عدد طبيعي باقي قسمته على 15 و على 22 هو 10 وباقي قسمته على 8 و على 16 هو 6. ماهي أصغر قيمة العدد n ؟

تمرين 23

(1) أحسب القاسم المشترك للأعداد 2490 ، 32785 ، 2905 .

(2) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (*) $7x + 6y = 79$

(ملاحظة $72 + 7 = 79$).

(3) اشترى نادي كرة اليد ملابس رياضية للاعبيه ، إذا علمت أن ثمن

بذلة اللاعب هو 2905 DA وثمن بذلة اللاعب 2490 DA وعلما أن النادي دفع في المجموع 32785 DA. ماهو عدد اللاعبين واللاعبات؟

تمرين 24

عين الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ في الحالات الآتية :

$$(1) \begin{cases} a^2 - b^2 = 20 \\ 2m = 24 \end{cases}, (2) \begin{cases} a + b = 20 \\ m = 6d \end{cases}, (3) \begin{cases} a + b = 42 \\ ab = 6m \end{cases}$$

حيث $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$

تمرين 25

نعتبر الأعداد الطبيعية $a = 3n + 2$ ، $b = 2n - 1$ ، $c = n + 2$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

(1) بين أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

(2) تحقق أن $a = 3c - 4$ واستنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a; c)$

(3) عين قيم العدد الطبيعي n لكي $\frac{a}{c} \in \mathbb{N}$.

(4) عين قيم n لكي الكسر $\frac{b}{c}$ يكون غير قابل للاختزال.

تمرين 26

لتكن (u_n) متتالية حسابية متزايدة حيث $u_2 > 4$.

ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين u_5 و u_2 وليكن m المضاعف المشترك الأصغر لهما.

(1) عين العددين الطبيعيين u_5 و u_2 علما أن $d = 2$ و $m = 56$.

(2- أ) استنتج الأساس والحد الأول لهذه المتتالية.

الجزء الثاني



Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

(ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n .
(ج) عين قيم n حتى يكون u_n يقبل القسمة على 7.

تمرين 27

- (1) يكتب العدد x في النظام العشري 17853. اكتب العدد x في النظام ذي الأساس 9 وفي النظام ذي الأساس 12.
(2) y عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي $\overline{3452}$. اكتب العدد y في النظام العشري ثم في النظام ذي الأساس 8.

تمرين 28

أوجد في كل حالة من الحالات الآتية أساس التعداد الذي يكون فيه :

$$\overline{15} \times \overline{23} = \overline{411} \quad (1)$$

$$\overline{22} \times \overline{32} = \overline{541} \quad (2)$$

$$\overline{77} + \overline{63} = \overline{162} \quad (3)$$

تمرين 29

n عدد طبيعي يكتب $\overline{4x3}$ في النظام ذي الأساس 5 و $\overline{x30}$ في النظام ذي الأساس 9. أوجد x ثم أكتب n في النظام العشري.

تمرين 30

n عدد طبيعي يكتب \overline{xyzzx} في النظام ذي الأساس 5 و \overline{yyxy} في النظام ذي الأساس 8. أكتب n في النظام العشري.

الموافقات

الموافقات في \mathbb{Z} :

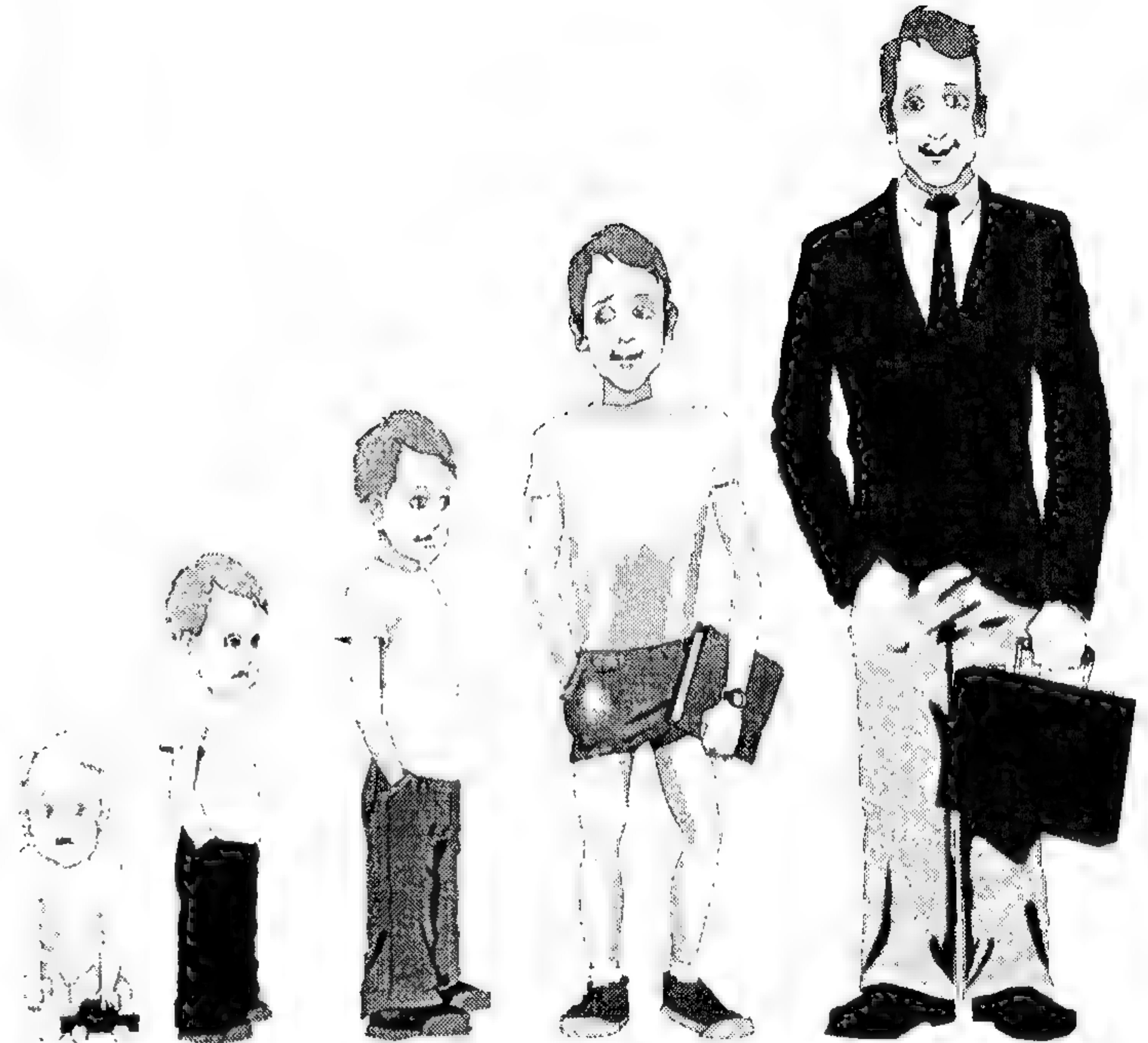
تعريف : a و b عدadan صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم .
نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا كان لهما نفس الباقي
في القسمة على n .
ونكتب : $a \equiv b [n]$ ونقرأ : a يوافق b بترديد n .

ملاحظات:

- x و y عدadan صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.
- $x \equiv y [n]$ يعني $x = kn + y$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \equiv 0 [n]$ يعني x يقبل القسمة على n .
- $x \equiv 0 [1]$ من أجل كل عدد صحيح x .
- $x \equiv y [n]$ يعني $(x - y)$ مضاعف لـ n .

خواص :

n عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماماً من 1 و a, b, c, d أعدادا صحيحة.



تمارين محلولة

تمرين 1

(أ) ما هو باقي قسمة الأعداد الآتية على 7

$$12^{2003}, 4000^{500}, 772^{1450}.$$

(ب) عين باقي قسمة الأعداد الآتية على 6

$$10^{3000}, 15^{2003}, 8^{200}, 17^{2003}.$$

الحل

$$(أ) 12^0 \equiv 1[7], 12^1 \equiv 5[7], 12^2 \equiv 4[7], 12^3 \equiv 6[7],$$

$$12^4 \equiv 2[7], 12^5 \equiv 3[7], 12^6 \equiv 1[7] \text{ فالدور هو } 6.$$

$$\text{لدينا : } 2003 = 6 \times 333 + 5 \text{ (شكل } 6k + 5 \text{)}$$

$$\text{ومنه : } \underline{\underline{12^{2003} \equiv 3[7]}}.$$

$$4000^0 \equiv 1[7], 4000^1 \equiv 3[7], 4000^2 \equiv 2[7],$$

$$4000^3 \equiv 6[7], 4000^4 \equiv 4[7], 4000^5 \equiv 5[7],$$

$$4000^6 \equiv 1[7] \text{ فالدور هو } 6.$$

$$\text{لدينا : } 500 = 6 \times 83 + 2 \text{ (شكل } 6k + 2 \text{)}$$

$$\text{ومنه : } \underline{\underline{4000^{500} \equiv 2[7]}}.$$

$$772^0 \equiv 1[7], 772^1 \equiv 2[7], 772^2 \equiv 4[7],$$

$$772^3 \equiv 1[7] \text{ فالدور هو } 3.$$

$$\text{لدينا : } 1450 = 3 \times 483 + 1 \text{ (شكل } 3k + 1 \text{)}$$

$$\text{ومنه : } \underline{\underline{772^{1450} \equiv 2[7]}}.$$

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته r على n بترديد n
أي : $a \equiv r [n]$.

من أجل كل عدد صحيح a فإن $a \equiv a [n]$.

إذا كان $a \equiv b [n]$ فإن $b \equiv a [n]$.

إذا كان $(a \equiv b [n] \text{ و } c \equiv d [n])$ فإن $a + c \equiv b + d [n]$.

إذا كان $(a \equiv b [n] \text{ و } c \equiv d [n])$ فإن $ac \equiv bd [n]$.

إذا كان $a \equiv b [n]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي p

$$a^p \equiv b^p [n].$$

إذا كان $a \equiv b [n]$ فإنه من أجل كل عدد صحيح k

$$ka \equiv kb [n].$$

إذا كان $ka \equiv kb [kn]$ فإنه من أجل كل عدد صحيح k

غير معدوم $a \equiv b [n]$.

إذا كان $ka \equiv kb [n]$ و $(k \text{ و } n \text{ أوليان فيما بينهما})$

$$\text{فإن } a \equiv b [n].$$

(ب) $10^2 \equiv 4[6]$ ، $10^1 \equiv 4[6]$ ، $10^0 \equiv 1[6]$
 من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $10^n \equiv 4[6]$
 إذن $10^{3000} \equiv 4[6]$.

$15^2 \equiv 3[6]$ ، $15^1 \equiv 3[6]$ ، $15^0 \equiv 1[6]$
 من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $15^n \equiv 3[6]$
 إذن $15^{2003} \equiv 3[6]$.

$8^3 \equiv 2[6]$ ، $8^2 \equiv 4[6]$ ، $8^1 \equiv 2[6]$ ، $8^0 \equiv 1[6]$
 $8^4 \equiv 4[6]$

نلاحظ أنه إذا كان n زوجيا فإن $8^n \equiv 4[6]$ ، وإذا كان n فرديا
 فإن $8^n \equiv 2[6]$ ومنه : $8^{200} \equiv 4[6]$.

$17^2 \equiv 1[6]$ ، $17^1 \equiv 5[6]$ ، $17^0 \equiv 1[6]$ فالدور هو 2
 لدينا : $2003 = 2 \times 1001 + 1$ (شكل $2k + 1$)
 ومنه : $17^{2003} \equiv 5[6]$.

تمرين 2

عين باقي القسمة الإقليدية على 11 لكل من الأعداد التالية:
 $119^{5430} + 125^{125}$ ، $4^{444} \times 10^{1000}$ ، $137^{137} - 56^{56}$.

الحل

* $137 \equiv 5[11]$ ومنه : $137^{137} \equiv 5^{137}[11]$.

$56 \equiv 1[11]$ ومنه : $56^{56} \equiv 1[11]$.

$5^3 \equiv 4[11]$ ، $5^2 \equiv 3[11]$ ، $5^1 \equiv 5[11]$ ، $5^0 \equiv 1[11]$
 $5^4 \equiv 9[11]$ ، $5^5 \equiv 1[11]$. الدور هو 5 .

$137 = 5 \times 27 + 2$ (شكل $5k + 2$) ومنه : $5^{137} \equiv 3[11]$

ومنه : $137^{137} - 56^{56} \equiv 3 - 1 \equiv 2[11]$.

* $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^0 \equiv 1[11]$

$4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$. الدور هو 5 .

$444 = 5 \times 88 + 4$ ومنه : $4^{444} \equiv 3[11]$

$10^{1000} \equiv (-1)^{1000}[11] \equiv 1[11]$ ومنه :

$4^{444} \times 10^{1000} \equiv 3 \times 1 \equiv 3[11]$

* $119^2 \equiv 4[11]$ ، $119^1 \equiv 9[11]$ ، $119^0 \equiv 1[11]$

$119^3 \equiv 3[11]$ ، $119^4 \equiv 5[11]$ ، $119^5 \equiv 1[11]$

فالدور هو 5 . $5430 = 5 \times 1086$ (شكل $5k$)

ومنه : $119^{5430} \equiv 1[11]$.

* $125^2 \equiv 5[11]$ ، $125^1 \equiv 4[11]$ ، $125^0 \equiv 1[11]$

$125^3 \equiv 9[11]$ ، $125^4 \equiv 3[11]$ ، $125^5 \equiv 1[11]$

فالدور هو 5 . $125 = 5 \times 25$ (شكل $5k$)

ومنه : $125^{125} \equiv 1[11]$

ومنه : $119^{5430} + 125^{125} \equiv 2[11]$.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$17^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$1 + 2 \times 17^n \equiv$	3	0	5	6	2	4	[7]

نستنتج من الجدول أنه إذا كان $n = 6k + 1$ فإن العدد $5 \times 17^{6n+3} + 2 \times 17^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

تمرين 4

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

أ - $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.

ب - $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5.

ج - $7^n + 3n - 1$ من مضاعفات العدد 9.

الحل

$$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 3 \times 5 \times (5^2)^n + 2 \times (2^3)^n [17]$$

$$\equiv 15 \times (25)^n + 2 \times 8^n [17] \quad \text{أ -}$$

$$\equiv 15 \times 8^n + 2 \times 8^n [17]$$

$$\equiv 17 \times 8^n \equiv 0 [17]$$

ب -

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^4 - 1 \equiv$	4	0	0	0	0	[5]
$n(n^4 - 1) \equiv$	0	0	0	0	0	[5]

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $n(n^4 - 1) \equiv 0 [5]$.

تمرين 3

(1) أ- أدرس حسب قيم العدد n باقي قسمة 17^n على 7.

ب- عين باقي قسمة كل من الأعداد التالية :

$$17^{2003}, \quad 36 \times 17^{1962} \text{ على } 7.$$

(2) عين قيم العدد الطبيعي n لكي العدد $5 \times 17^{6n+3} + 2 \times 17^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

الحل

$$(1) \text{ أ- } 17^0 \equiv 1 [7], \quad 17^1 \equiv 3 [7], \quad 17^2 \equiv 2 [7],$$

$$17^3 \equiv 6 [7], \quad 17^4 \equiv 4 [7], \quad 17^5 \equiv 5 [7], \quad 17^6 \equiv 1 [7]$$

فالدور هو 6.

$$17^{6k} \equiv 1 [7], \quad 17^{6k+1} \equiv 3 [7], \quad 17^{6k+2} \equiv 2 [7],$$

$$17^{6k+3} \equiv 6 [7], \quad 17^{6k+4} \equiv 4 [7], \quad 17^{6k+5} \equiv 5 [7].$$

ب- $2003 = 6 \times 333 + 5$ (شكل $6k + 5$) ومنه :

$$17^{2003} \equiv 5 [7]$$

$$1962 = 6 \times 327 \text{ (شكل } 6k \text{) ومنه : } 17^{1962} \equiv 1 [7],$$

$$36 \times 17^{1962} \equiv 1 \times 1 \equiv [7].$$

$$(2) \quad 2 \times 17^{n+2} \equiv 2 \times 17^n \times 17^2 \equiv 4 \times 17^n [7], \quad 5 \times 17^{6n+3} \equiv 6 [7]$$

$$5 \times 17^{6n+3} + 2 \times 17^{n+2} \equiv 5 \times 6 + 4 \times 17^n \equiv 2 + 4 \times 17^n [7]$$

$5 \times 17^{6n+3} + 2 \times 17^{n+2}$ يقبل القسمة على 7 إذا كان

$$2 + 4 \times 17^n \equiv 0 [7] \text{ ومنه : } 2(1 + 2 \times 17^n) \equiv 0 [7] \text{ ومنه :}$$

$$1 + 2 \times 17^n \equiv 0 [7].$$

جـ - $7^3 \equiv 1[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^0 \equiv 1[9]$ ،
فالدور هو 3 .

- إذا كان $n = 3k$ فإن: $7^n + 3n - 1 \equiv 1 + 9k - 1 \equiv 0[9]$.
- إذا كان $n = 3k + 1$ فإن :

$7^n + 3n - 1 \equiv 7 + 3(3k + 1) - 1 \equiv 7 + 9k + 2 \equiv 0[9]$
- إذا كان $n = 3k + 2$ فإن

$7^n + 3n - 1 \equiv 4 + 3(3k + 2) - 1 \equiv 9k + 9 \equiv 0[9]$

إذن مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $7^n + 3n - 1$ مضاعفات العدد 9 .

تمرين 5

- (1) ما هو باقي قسمة مربع عدد طبيعي على 5 ؟
- (2) ما هو باقي قسمة مربع عدد فردي على 8 ؟
- (3) ما هو باقي قسمة مكعب عدد طبيعي على 5 ؟

الحل

(1)

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	[5]

نلاحظ أن باقي قسمة مربع عدد طبيعي على 5 هو 0 إذا كان $n = 5k$ مع $k \in \mathbb{N}$.

و إذا كان $n = 5k + 1$ أو $n = 5k + 4$ فإن باقي قسمة n^2 على 5 هو 1 .

و إذا كان $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 3$ فإن باقي قسمة n^2 على 5 هو 4 .

(2) نعلم أن شكل العدد الطبيعي الفردي هو $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$
 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 8h + 1$
(لأن $k(k + 1)$ هو جداء عددين متتاليين فهو عدد زوجي أي $2h$)
 $n^2 \equiv 8h + 1 \equiv 1[8]$ فباقي قسمة مربع عدد فردي على 8 هو 1 .

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^3 \equiv$	0	1	3	2	4	[5]

تمرين 6

عين في كل حالة من الحالات التالية العداد الطبيعية n بحيث يكون:

(1) $n^2 + 3n + 1$ يقبل القسمة على 5 .

(2) $n^3 + n + 2$ من مضاعفات العدد 7 .

(3) $2^n + 2^{3n+2} + 2^{6n+1} + 4 \equiv 0[7]$

الحل

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$n^2 + 3n + 1 \equiv$	1	0	1	4	4	[5]

يكون العدد $n^2 + 3n + 1$ قابلاً للقسمة على 5 إذا كان

$n = 5k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$n^3 + n + 2 \equiv$	2	4	5	4	0	6	0	[7]

يكون العدد $n^3 + n + 2$ من مضاعفات العدد 7 إذا كان $n = 7k + 4$ أو $n = 7k + 6$.

(3) $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ فالدور

هو 3 ومنه : $2^{3n+2} \equiv 4[7]$ و $2^{6n+1} \equiv (2^{3n})^2 \times 2 \equiv 2[7]$

و $2^n + 2^{3n+2} + 2^{6n+1} + 4 \equiv 2^n + 4 + 2 + 4 \equiv 2^n + 3[7]$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]
$2^n + 3 \equiv$	4	5	0	[7]

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن $2^n + 2^{3n+2} + 2^{6n+1} + 4 \equiv 0[7]$

تمرين 7

(1) أدرس حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية لـ 3^n على 7.

(2) أ - عين باقي قسمة العدد 3^{2003} على 7.

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن :

$$2 \times 3^{6k+1} - 3^{12k+3} \equiv 0[7]$$

(3) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \text{ فإن : } 2 \times 3^{n+1} - 3^{6n+2} + 1 \equiv 0[7]$$

الحل

$$3^0 \equiv 1[7] , 3^1 \equiv 3[7] , 3^2 \equiv 2[7] , 3^3 \equiv 6[7]$$

$$3^4 \equiv 4[7] , 3^5 \equiv 5[7] , 3^6 \equiv 1[7] \text{ فالدور هو 6.}$$

ومنه : $3^{6k} \equiv 1[7]$ ، $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ،

$$3^{6k+3} \equiv 6[7] , 3^{6k+4} \equiv 4[7] , 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

(2) أ - $2003 = 6 \times 333 + 5$ (من الشكل $6k + 5$) ومنه :

$$3^{2003} \equiv 5[7]$$

ب -

$$2 \times 3^{6k+1} - 3^{12k+3} \equiv 2 \times 3 - (3^{6k})^2 \times 3^3 \equiv 6 - 1 \times 6 \equiv 0[7]$$

(3)

$$2 \times 3^{n+1} + 3^{6n+2} + 1 \equiv 6 \times 3^n + 2 + 1 \equiv 3(2 \times 3^n + 1) \equiv 0[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$2 \times 3^n + 1 \equiv$	3	0	5	6	2	4	[7]

مجموعة الأعداد الطبيعية المطلوبة هي : $n = 6k + 1$.

تمرين 8

(1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة لـ 5^n على 13.

(2) أ - ما هو باقي قسمة العدد 239^{2003} على 13 ؟

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$2 \times 25^{2k+1} + 5^{4k+3} + 7 \equiv 0[13]$$

(3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $5^n + 5^{2n} + 1 \equiv 5[7]$.

(3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $5 \times 3^n + 2 \times 7^n \equiv 2[5]$.

الحل

$$(1) \quad 3^0 \equiv 1[5], \quad 3^1 \equiv 3[5], \quad 3^2 \equiv 4[5], \quad 3^3 \equiv 2[5],$$

$$3^4 \equiv 1[5] \text{ فالدور هو } 4. \text{ ومنه } 3^{4k} \equiv 1[5]$$

$$3^{4k+1} \equiv 3[5], \quad 3^{4k+2} \equiv 4[5], \quad 3^{4k+3} \equiv 2[5]$$

$$7^0 \equiv 1[5], \quad 7^1 \equiv 2[5], \quad 7^2 \equiv 4[5]$$

$$7^3 \equiv 3[5], \quad 7^4 \equiv 1[5]$$

$$7^{4k} \equiv 1[5], \quad 7^{4k+1} \equiv 2[5]$$

$$7^{4k+2} \equiv 4[5], \quad 7^{4k+3} \equiv 3[5]$$

$$2 \times 41^n + 3 \times 7^{12n} \equiv 2 \times (1)^n + 3 \times (7^{4n})^3 \equiv 2 + 3 \times 1 \equiv 0[5]$$

(3)

$n \equiv$	0	1	2	3	[4]
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]
$7^n \equiv$	1	2	4	3	[5]
$5 \times 3^n + 2 \times 7^n \equiv$	2	4	3	1	[5]

من الجدول نستنتج أن : $n = 4k \quad (k \in \mathbb{N})$

تمرين 10

(1) أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 11.

الحل

$$(1) \quad 5^0 \equiv 1[13], \quad 5^1 \equiv 5[13], \quad 5^2 \equiv 12[13], \quad 5^3 \equiv 8[13]$$

$$5^4 \equiv 1[13] \text{ فالدور هو } 4. \text{ ومنه } 5^{4k} \equiv 1[13]$$

$$5^{4k+1} \equiv 5[13], \quad 5^{4k+2} \equiv 12[13], \quad 5^{4k+3} \equiv 8[13]$$

$$(2) \quad 239 \equiv 5[13] \text{ ومنه } 239^{2003} \equiv 5^{2003}[13]$$

$$\text{وبما أن } 2003 = 4 \times 500 + 3 \text{ (شكل } 4k + 3 \text{) فإن :}$$

$$5^{2003} \equiv 8[13] \text{ إذن } 239^{2003} \equiv 8[13]$$

$$(ب) \quad 2 \times 25^{2k+1} + 5^{4k+3} + 7 \equiv 2 \times (5^2)^{2k+1} + 5^{4k+3} + 7$$

$$\equiv 2 \times 5^{4k+2} + 5^{4k+3} + 7 \equiv 2 \times 12 + 8 + 7 \equiv 0[13]$$

(3)

$n \equiv$	0	1	2	3	[4]
$5^n \equiv$	1	5	12	8	[13]
$5^{2n} \equiv$	1	12	1	12	[13]
$5^n + 5^{2n} + 1 \equiv$	3	5	1	8	[13]

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $5^n + 5^{2n} + 1 \equiv 5[13]$.

تمرين 9

(1) n عدد طبيعي ، أدرس باقي قسمة كل من العددين

3^n و 7^n على 5.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد

$$2 \times 41^n + 3 \times 7^{12n}$$

يقبل القسمة على 5.

(2) برهن بأن العدد $7^{10n} - 1$ يقبل القسمة على 11 مهما يكن العدد الطبيعي n .

(3) برهن بأنه من أجل كل عدد طبيعي n فالعدد $7^{10n} - 1$ يقبل القسمة على 66.

(4) عين باقي قسمة العدد $49^{5n+1} + 18^{20n+3} - 23^n + 1$ على 11.

الحل

$$\begin{aligned} (1) \quad & 7^0 \equiv 1[11], \quad 7^1 \equiv 7[11], \quad 7^2 \equiv 5[11], \quad 7^3 \equiv 2[11], \\ & 7^4 \equiv 3[11], \quad 7^5 \equiv 10[11], \quad 7^6 \equiv 4[11], \quad 7^7 \equiv 6[11], \\ & 7^8 \equiv 9[11], \quad 7^9 \equiv 8[11], \quad 7^{10} \equiv 1[11], \\ & 7^{10k} \equiv 1[11], \quad 7^{10k+1} \equiv 7[11], \quad 7^{10k+2} \equiv 5[11], \\ & 7^{10k+3} \equiv 2[11], \quad 7^{10k+4} \equiv 3[11], \quad 7^{10k+5} \equiv 10[11], \\ & 7^{10k+6} \equiv 4[11], \quad 7^{10k+7} \equiv 6[11], \quad 7^{10k+8} \equiv 9[11], \\ & 7^{10k+9} \equiv 8[11]. \end{aligned}$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $7^{10n} \equiv 1[11]$ ومنه : $7^{10n} - 1 \equiv 0[11]$.

(3) $7 \equiv 1[6]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $7^{10n} \equiv 1[6]$ ومنه : $7^{10n} - 1 \equiv 0[6]$ فالعدد $7^{10n} - 1$ يقبل القسمة على 6.

بما أن العدد $7^{10n} - 1$ يقبل القسمة على 11 وعلى 6
و $PGCD(6; 11) = 1$ فالعدد $7^{10n} - 1$ يقبل القسمة على الجداء $6 \times 11 = 66$.

$$49^{5n+1} + 18^{20n+3} - 23^n + 1 \equiv (7^2)^{5n+1} + 7^{20n+3} - 1^n + 1 \quad (4)$$

$$\equiv 7^{10n+2} + 7^{20n} \times 7^3 [11]$$

و $7[11] \equiv 5 + 1 \times 2 \equiv 7[11] \equiv 7^{10n+2} + (7^{10n})^2 \times 7^3 \equiv 5 + 1 \times 2 \equiv 7[11]$ إذن باقي قسمة العدد $49^{5n+1} + 18^{20n+3} - 23^n + 1$ على 11 هو 7.

تمرين 11

(1) أدرس بواقي قسمة العددين 5^n و 3^n على 8.

(2) عين باقي قسمة العدد $3^{2003} + 2 \times 5^{2003}$ على 8.

(3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $5 \times 3^n + 3$ قابلاً للقسمة على 8.

(4) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $5^n - 3^n \equiv 0[8]$.

الحل

$$(1) \quad 5^0 \equiv 1[8], \quad 5^1 \equiv 5[8], \quad 5^2 \equiv 1[8] \text{ فالدور هو } 2$$

$$\text{ومنه } 5^{2k} \equiv 1[8], \quad 5^{2k+1} \equiv 5[8].$$

$$3^0 \equiv 1[8], \quad 3^1 \equiv 3[8], \quad 3^2 \equiv 1[8] \text{ فالدور هو } 2$$

$$\text{ومنه } 3^{2k} \equiv 1[8], \quad 3^{2k+1} \equiv 3[8].$$

$$(2) \quad 2003 = 2 \times 1001 + 1 \text{ (الشكل } 2k + 1 \text{) إذن } 5^{2003} \equiv 5[8]$$

$$\text{و } 3^{2003} \equiv 3[8] \text{ ومنه : } 2 \times 5^{2003} + 3^{2003} \equiv 5[8].$$

$$(3) \quad 5 \times 3^n + 3 \equiv 0[8]$$

$$12^3 \equiv 6[7], 12^2 \equiv 4[7], 12^1 \equiv 5[7], 12^0 \equiv 1[7]$$

$$12^6 \equiv 1[7], 12^5 \equiv 3[7], 12^4 \equiv 2[7]$$

$$\text{ومنه: } 12^{6k+2} \equiv 4[7], 12^{6k+1} \equiv 5[7], 12^{6k} \equiv 1[7]$$

$$12^{6k+5} \equiv 3[7], 12^{6k+4} \equiv 2[7], 12^{6k+3} \equiv 6[7]$$

$$4 \times 4^{3k+2} + 2 \times 25^{3k+1} \equiv 4 \times 11^{3k+2} + 2 \times (5^2)^{3k+1}$$

$$\equiv 4 \times 11^{3k+2} + 2 \times 5^{6k+2} \equiv 4 \times 11^{3k+2} + 2 \times 12^{6k+2} \quad (2)$$

$$\equiv 8 + 8 \equiv 2[7]$$

$$2 \times 11^n - 11^{3n+1} \equiv 2 \times 11^n - 4 \equiv 0[7] \quad (3)$$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$11^n \equiv$	1	4	2	[7]
$2 \times 11^n - 4 \equiv$	5	4	0	[7]

حلول المعادلة المعطاة هو : $n = 3k + 2$ (مع $k \in \mathbb{N}$)

$$12^{6k+3} - 11^{3k+2} \equiv 4[7] \text{ و } 12^{6k+5} - 11^{3k} \equiv 4[7] \quad (4)$$

$$\text{و } 12^{6k} - 11^{3k+1} \equiv 4[7] \text{ و } 12^{6k+1} - 11^{3k} \equiv 4[7] \text{ ومنه:}$$

الثنائيات المطلوبة $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ هي : $(6k + 5; 3k)$

$$(6k; 3k + 1), (6k + 1; 3k), (6k + 3; 3k + 2)$$

تمرين 13

(1) n عدد طبيعي ، احسب بدلالة n المجموع S_n المعروف بـ:

$n \equiv$	0	1	[2]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$5 \times 3^n + 3 \equiv$	0	2	[8]

الأعداد الطبيعية المطلوبة هي $n = 2k$ (مع $k \in \mathbb{N}$)

$$5^n - 3^n \equiv 0[8] \quad (4)$$

$n \equiv$	0	1	[2]
$5^n \equiv$	1	5	[8]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$5^n - 3^n \equiv$	0	2	[8]

ومنه : $n = 2k$ (مع $k \in \mathbb{N}$)

تمرين 12

(1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 11^n و 12^n على 7.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$4 \times 4^{3k+2} + 2 \times 25^{3k+1} \equiv 2[7]$$

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة : $2 \times 11^n - 11^{3n+1} \equiv 0[7]$

(4) عين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حيث : $12^x - 11^y \equiv 4[7]$

الحل

$$11^3 \equiv 1[7], 11^2 \equiv 2[7], 11^1 \equiv 4[7], 11^0 \equiv 1[7]$$

فالدور هو 3 ومنه :

$$11^{3k+2} \equiv 2[7], 11^{3k+1} \equiv 4[7], 11^{3k} \equiv 1[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$3^{2n} \equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$2 \times 3^n + 9^n - 1 \equiv$	2	0	0	5	2	6	[7]

ومنه حلول المعادلة هي: $n = 6k + 1$ و $n = 6k + 2$ مع $(k \in \mathbb{N})$.

تمرين 14

n عدد طبيعي و $a = n(n^4 - 1)$.

- (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$.
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن a يقبل القسمة على 6.
- (3) استنتج أن العدد $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 30.
- (4) أ- تحقق أن n يقبل القسمة على 3.
ب - باستعمال السؤال السابق هل نستطيع أن نقول بأن العدد a يقبل القسمة على 90؟

الحل

(1)

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^4 \equiv$	0	1	1	1	1	[5]
$n(n^4 - 1) \equiv$	0	0	0	0	0	[5]

$$S_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$$

(2) أدرس بواقى قسمة 3^n على 7.

(3) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $2S_n + 9^{3n+1} \equiv 0[7]$

(4) حل في \mathbb{N} المعادلة: $2 \times 3^n + 9^n - 1 \equiv 0[7]$

الحل

(1) S_n هو مجموع n حد الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1

$$\text{و أساسها } q = 3 \text{ و منه: } S_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$(2) \quad 3^0 \equiv 1[7], \quad 3^1 \equiv 3[7], \quad 3^2 \equiv 2[7], \quad 3^3 \equiv 6[7]$$

$$3^4 \equiv 4[7], \quad 3^5 \equiv 5[7], \quad 3^6 \equiv 1[7] \text{ فالدور هو 6.}$$

$$3^{6k} \equiv 1[7], \quad 3^{6k+1} \equiv 3[7], \quad 3^{6k+2} \equiv 2[7]$$

$$3^{6k+3} \equiv 6[7], \quad 3^{6k+4} \equiv 4[7], \quad 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

$$(3) \quad 2S_n + 9^{3n+1} \equiv 3^n - 1 + 3^{6n+2} \equiv 3^n + 1 \equiv 0[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$3^n + 1 \equiv$	2	4	3	0	5	6	[7]

ومنه: $n = 6k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$

$$(4) \quad 2 \times 3^n + 9^n - 1 \equiv 2 \times 3^n + 3^{2n} - 1 \equiv 0[7]$$

نستنتج من الجدول أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

$$\begin{aligned} a &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

نعلم أن جداء عددين متتاليين هو من مضاعفات العدد 2 أي $n(n + 1) = 2h$ و جداء ثلاثة أعداد متتالية $(n - 1)n(n + 1)$ هو من مضاعفات 3 ، فالعدد a يقبل القسمة على 2 و 3 وهما أوليان فيما بينهما حسب خواص تطبيقات غوص فالعدد a يقبل القسمة على الجداء 3×2 أي على 6 .
(يمكن استعمال طريقة الجدول للوصول إلى هذه النتيجة) .

(3) بما أن العدد a يقبل القسمة على 5 و على 6 و $PGCD(5; 6) = 1$ حسب تطبيقات غوص فالعدد a يقبل القسمة على الجداء 5×6 أي على 30 .

(4) - نعلم من السؤال السابق أن العدد a يقبل القسمة على 30 .
العدد a يقبل القسمة على 30 و على 3 و بما أن 30 و 3 ليس أوليين فيما بينهما فلا نستطيع أن نقول أن a يقبل القسمة على جدائهما 90 .

تمرين 15

(1) أدرس بواقى قسمة العدد 5^n على 31 .

(2) - أ- عين باقي قسمة العدد 5^{2003} على 31 .

ب - عين الأعداد الطبيعية n بحيث $311 \times 5^n + 1 \equiv 6[31]$.

(3) برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي n ليس من مضاعفات 3 فإن العدد $5^n + 5^{2n} + 1$ يقبل القسمة على 31 .

الحل

$$\begin{aligned} (1) \quad 5^3 &\equiv 1[31] , 5^2 \equiv 25[31] , 5^1 \equiv 5[31] , 5^0 \equiv 1[31] \\ \text{فالدور 3 ومنه : } 5^{3k} &\equiv 1[31] , 5^{3k+1} \equiv 5[31] , 5^{3k+2} \equiv 25[31] \end{aligned}$$

$$(2) \text{ - بما أن } 2003 = 3 \times 667 + 2 \text{ (شكل } 3k + 2 \text{) فإن : } 5^{2003} \equiv 25[31]$$

ب -

$n \equiv$	0	1	2	$[3]$
$5^n \equiv$	1	5	25	$[31]$
$311 \times 5^n + 1 \equiv$	2	6	26	$[31]$

نلاحظ من الجدول أن : $n = 3k + 1$.

(3) ليس من مضاعفات 3 يعني أن $n = 3k + 1$ أو

$$n = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن :

$$5^n + 5^{2n} + 1 \equiv 5^{3k+1} + (5^{3k+1})^2 + 1 \equiv 5 + 25 + 1 \equiv 0[31]$$

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن :

$$5^n + 5^{2n} + 1 \equiv 5^{3k+2} + (5^{3k+2})^2 + 1 \equiv 25 + 625 + 1 \equiv 0[31]$$

تمرين 16

(1) برهن أنه إذا كانت الأعداد الطبيعية a ، b ، c ليست من

$$\text{مضاعفات 3 فإن : } a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0[3]$$

(2) عين باقي قسمة العدد $29^n + 31^n$ على 3 .

(3) برهن أنه إذا كان عددا طبيعيا ليس من مضاعفات العدد 5 فيكون مربعه من الشكل $5k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

الحل

(1) العدد الذي ليس من مضاعفات 3 هو من الشكل $3k + 1$ أو $3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فيكون :

$$(3k + 1)^2 \equiv 1[3] \text{ و } (3k + 2)^2 \equiv 4 \equiv 1[3] \text{ ومنه :}$$

مهما يكن العدد الطبيعي n و $n \neq 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) فإن :
 $n^2 \equiv 1[3]$. إذن إذا كانت الأعداد الطبيعية a, b, c ليست من

مضاعفات 3 فإن : $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0[3]$.

$$(2) \quad 31^n + 29^n \equiv 1 + 2^n \equiv 1 + (-1)^n [3] \text{ ومنه :}$$

إذا كان n عددا فرديا فإن $1 + (-1)^n \equiv 1 - 1 \equiv 0[3]$.

و إذا كان n عددا زوجيا فإن $1 + (-1)^n \equiv 1 + 1 \equiv 2[3]$.

(3) العدد الذي ليس من مضاعفات 5 هو من الشكل $5k + 1$ ، $5k + 2$ ، $5k + 3$ ، $5k + 4$ و يكون مربعه يوافق ± 1 بترديد 5 كما نرى في الجدول الآتي :

$n \equiv$	1	2	3	4	[5]
$n^2 \equiv$	1	-1	-1	1	[5]

ومنه $n^2 \equiv \pm 1[5]$ ومنه : $n^2 = 5k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

تمرين 17

(1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كلا من العددين 8^n و 9^n على 13 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد

$$(2 + 64^{2n+1} - 3^{6n+2})$$
 يقبل القسمة على 13 .

(3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد

$$(1 - 30n^2 + 2003^{2n+1} - 3^{6n})$$
 قابلا القسمة على 13 .

(4) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $38^n - 8^n \equiv 9[13]$

الحل

$$(1) \quad 8^0 \equiv 1[13] , 8^1 \equiv 8[13] , 8^2 \equiv 12[13] , 8^3 \equiv 5[13]$$

$$, 8^4 \equiv 1[13] \text{ فالدور هو 4 . ومنه : } 8^{4k} \equiv 1[13]$$

$$, 8^{4k+1} \equiv 8[13] , 8^{4k+2} \equiv 12[13] , 8^{4k+3} \equiv 5[13]$$

$$, 9^0 \equiv 1[13] , 9^1 \equiv 9[13] , 9^2 \equiv 3[13] , 9^3 \equiv 1[13]$$

فالدور هو 3 . ومنه :

$$, 9^{3k} \equiv 1[13] , 9^{3k+1} \equiv 9[13] , 9^{3k+2} \equiv 3[13]$$

$$(2) \quad 3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2 \equiv (3^2)^{3n+1} - 2 \times (8^2)^{2n+1} + 2$$

$$\equiv 9^{3n+1} - 2 \times 8^{4n+2} + 2 \equiv 9 - 24 + 2 \equiv 0[13]$$

$$, 3^{6n} - 2003^{2n+1} + 30n^2 - 1 \equiv 0[13] \text{ ومنه :}$$

$$, 9^{3n} - 1 + 4n^2 - 1 \equiv 4n^2 - 1 \equiv 0[13] \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 7^{4n+1} + 2 \times 8^{4n+2} + 3n \equiv 0[5] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

الحل

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2^3 \equiv 3[5], 2^2 \equiv 4[5], 2^1 \equiv 2[5], 2^0 \equiv 1[5] \\ & 2^4 \equiv 1[5] \text{ . فالدور هو 4 ومنه :} \\ & 2^{4k+2} \equiv 4[5], 2^{4k+1} \equiv 2[5], 2^{4k} \equiv 1[5] \\ & 2^{4k+3} \equiv 2[5] \\ & 3^3 \equiv 2[5], 3^2 \equiv 4[5], 3^1 \equiv 3[5], 3^0 \equiv 1[5] \\ & 3^4 \equiv 1[5] \text{ . فالدور هو 4 ومنه :} \\ & 3^{4k+1} \equiv 3[5], 3^{4k} \equiv 1[5] \\ & 3^{4k+3} \equiv 2[5], 3^{4k+2} \equiv 4[5] \\ & 1999^{1999} + 2002^{2002} + 2003^{2003} \equiv 4^{1999} + 2^{2002} + 3^{2003} \\ & \equiv (-1)^{1999} + 2^{2002} + 3^{2003} [5] \\ & 2002 = 4 \times 500 + 2 \text{ (شكل } 4k + 2 \text{) ومنه : } 2^{2002} \equiv 4[5] \\ & 2003 = 4 \times 500 + 3 \text{ ومنه : } 3^{2003} \equiv 2[5] \\ & \text{ومنه : } (-1)^{1999} + 2^{2002} + 3^{2003} \equiv -1 + 4 + 2 \equiv 0[5] \\ & 2^n + 3^{2n} + 4^n \equiv 2^n + 3^{2n} + (-1)^n [5] \quad (3) \end{aligned}$$

$$2n - 1 \equiv 0[13] \text{ ومنه : } (2n - 1)(2n + 1) \equiv 0[13] \\ \text{أو } 2n + 1 \equiv 0[13] \text{ (لأن 13 عددا أوليا) .}$$

$$2n - 1 \equiv 0[13] \text{ يكافئ } 2n \equiv 1[13] \text{ ومنه : } 7 \times 2n \equiv 7[13] \\ \text{ومنه : } n = 13k + 7$$

$$2n + 1 \equiv 0[13] \text{ ومنه : } 2n \equiv -1 \equiv 12[13] \text{ ومنه :}$$

$$n \equiv 6[13] \text{ ومنه : } n = 13k + 6 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) .}$$

$$(4) \quad 8^n - 38^n \equiv 9[13] \text{ ومنه :}$$

$$8^n - 12^n \equiv 8^n - (-1)^n \equiv 9[13]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	[4]
$8^n \equiv$	1	8	12	5	[13]
$8^n - (-1)^n \equiv$	0	9	11	6	[13]

$$\text{ومنه : } n = 4k + 1 \text{ (مع } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

تمرين 18

(1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة كلا من العددين 2^n و 3^n على 5.

(2) استنتج باقي قسمة العدد $1999^{1999} + 2002^{2002} + 2003^{2003}$ على 5.

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة : $2^n + 3^{2n} + 4^n \equiv 0[5]$.

(4) عين مجموعة قيم n التي تحقق :

$$\text{ومنه: } \begin{cases} n \equiv 0[10] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases} \text{ يكافئ: } \begin{cases} 3n \equiv 0[10] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

$$n = 10k \text{ (مع } k \in \mathbb{N} \text{) و } 10 \leq n \leq 50$$

$$\text{إذن: } n \in \{10; 20; 30; 40; 50\}$$

تمرين 19

(1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 16^n و 17^n على 7.

(2) استنتج باقي قسمة العدد $16^{2003} + 17^{2003}$ على 7.

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة: $16^n \times n + 2n - 1 \equiv 1[7]$.

(4) عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حيث:

$$2^x - 3^y \equiv 1[7]$$

الحل

$$(1) 16^3 \equiv 1[7], 16^2 \equiv 4[7], 16^1 \equiv 2[7], 16^0 \equiv 1[7]$$

فالدور هو 3. ومنه:

$$16^{3k+2} \equiv 4[7], 16^{3k+1} \equiv 2[7], 16^{3k} \equiv 1[7]$$

$$17^3 \equiv 6[7], 17^2 \equiv 2[7], 17^1 \equiv 3[7], 17^0 \equiv 1[7]$$

$$17^6 \equiv 1[7], 17^5 \equiv 5[7], 17^4 \equiv 4[7] \text{ فالدور هو 6.}$$

$$\text{ومنه: } 17^{6k+2} \equiv 2[7], 17^{6k+1} \equiv 3[7], 17^{6k} \equiv 1[7]$$

$$17^{6k+5} \equiv 5[7], 17^{6k+4} \equiv 4[7], 17^{6k+3} \equiv 6[7]$$

$$(2) 2003 = 3 \times 667 + 2 \text{ (شكل } 3k + 2 \text{) ومنه: } 16^{2003} \equiv 4[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	[4]
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]
$3^{2^n} \equiv$	1	4	1	4	[5]
$2^n + 3^{2^n} + (-1)^n \equiv$	3	0	1	1	[5]

إذن حلول المعادلة $2^n + 3^{2^n} + 4^n \equiv 0[5]$ هي: $n = 4k + 1$

(مع $k \in \mathbb{N}$)

$$(4) \begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 7^{4n+1} + 2 \times 8^{4n+2} + 3n \equiv 0[5] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases} \text{ يكافئ:}$$

$$\begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 2^{4n+1} + 2 \times 3^{4n+2} + 3n \equiv 10 + 3n \equiv 3n \equiv 0[5] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5n \equiv 0[10] \\ 2n \equiv 0[10] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} n \equiv 0[2] \\ n \equiv 0[5] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 3n \equiv 0[5] \\ 10 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

تمرين 20

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n في الحالات التالية:

$$(1) \quad n + 4 \equiv 0 [n - 1]$$

$$(2) \quad 3n - 27 \equiv 0 [n + 3] \quad (4) \quad \begin{cases} n \equiv 2 [7] \\ n \equiv 1 [5] \end{cases}$$

$$(3) \quad n^2 + 2n + 3 \equiv 0 [n - 1]$$

الحل

$$(1) \quad n + 4 \equiv 0 [n - 1] \text{ يكافئ } (n - 1) + 5 \equiv 0 [n - 1] \text{ ومنه: } (n - 1) \in \{1; 5\} \text{ يقسم } 5 \text{ يكافئ } (n - 1) \in \{1; 5\} \text{ ومنه: } n \in \{2; 6\}$$

$$(2) \quad 3n - 27 \equiv 0 [n + 3] \text{ يكافئ } 3(n + 3) - 36 \equiv 0 [n + 3] \text{ ومنه: } 36 \equiv 0 [n + 3] \text{ ومنه: } (n + 3) \text{ يقسم } 36 \text{ ومنه: } (n + 3) \in \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\} \text{ ومنه: } n \in \{0; 1; 3; 6; 9; 15; 33\}$$

$$(3) \quad n^2 + 2n + 3 \equiv 0 [n - 1] \text{ يكافئ } (n + 3)(n - 1) + 6 \equiv 0 [n - 1] \text{ ومنه: } 6 \equiv 0 [n - 1] \text{ ومنه: } (n - 1) \in \{1; 2; 3; 6\} \text{ يقسم } 6 \text{ ومنه: } (n - 1) \in \{1; 2; 3; 6\} \text{ ومنه: } n \in \{2; 3; 4; 7\}$$

$$2003 = 6 \times 333 + 5 \text{ (شكل } 6k + 5 \text{) ومنه: } 17^{2003} \equiv 5 [7]$$

$$\text{ومنه: } 16^{2003} + 17^{2003} \equiv 4 + 5 \equiv 2 [7]$$

$$(3) \text{ - إذا كان: } n = 3k \text{ فإن}$$

$$16^n \times n + 2n - 1 \equiv 1 \times 3k + 2 \times 3k - 1 \equiv 2k - 1 \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه: } 2k \equiv 1 [7] \text{ ومنه: } k \equiv 4 [7] \text{ ومنه: } k = 7h + 4$$

$$\text{إن } n = 3k = 21h + 12 \text{ (مع } h \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{- إذا كان: } n = 3k + 1 \text{ فإن}$$

$$16^n \times n + 2n - 1 \equiv 2 \times (3k + 1) + 2 \times (3k + 1) - 1 \equiv 5k + 3 \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه: } 5k \equiv -3 \equiv 4 [7] \text{ ومنه: } k \equiv 5 [7] \text{ ومنه: } k = 7h + 5$$

$$\text{إن } n = 3k + 1 = 21h + 16 \text{ (مع } h \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{- إذا كان: } n = 3k + 2 \text{ فإن}$$

$$16^n \times n + 2n - 1 \equiv 4n + 2n - 1$$

$$\equiv 6(3k + 2) - 1 \equiv 4k + 4 \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه: } 4k \equiv -4 [7] \text{ ومنه: } k \equiv -1 \equiv 6 [7] \text{ ومنه:}$$

$$k = 7h + 6 \text{ إن } n = 3k + 2 = 21h + 20 \text{ (مع } h \in \mathbb{N} \text{)}$$

إن حلول المعادلة المعطاة هي:

$$n = 21h + 12 \text{ أو } n = 21h + 16 \text{ أو } n = 21h + 20$$

$$(4) \quad 2^x - 3^y \equiv 1 [7] \text{ ومنه: } 16^x - 17^y \equiv 1 [7] \text{ من السؤال}$$

السابق (1) نستنتج ما يلي:

$$16^{3k+2} - 17^{6k+1} \equiv 1 [7] \text{ و } 16^{3k+1} - 17^{6k} \equiv 1 [7] \text{ ومنه}$$

الثبتات المطلوبة هي:

$$(x; y) \in \{(3k + 1; 6k); (3k + 2; 6k + 1)\}$$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$x^2 - 3x \equiv$	0	3	3	0	4	[5]
$x^2 - 3x - 4 \equiv$	1	4	4	1	0	[5]

ومنه : $x = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$(4) \quad (3x + 1)(x - 1) \equiv 0[7]$$

ومنه : ($3x + 1 \equiv 0[7]$ أو $x - 1 \equiv 0[7]$)

$$* \quad 3x + 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه : } x \equiv 2[7] \text{ ومنه : } x = 7k + 2.$$

$$* \quad x - 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه : } x \equiv 1[7] \text{ ومنه : } x = 7k + 1.$$

تمرين 22

(1) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $5x - 7y = 6$

- باستعمال طريقة الموافقة بترديد n حل المعادلة *.

(2) عين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 والتي هي حل للمعادلة * بحيث :

$$4 \leq x \leq 35 \text{ و } 0 \leq y \leq 30.$$

$$(3) \text{ عين أصغر عدد طبيعي } a \text{ يحقق : } \begin{cases} a \equiv 4[7] \\ a \equiv -2[5] \end{cases}$$

الحل

$$(1) \quad 5x - 7y = 6 \text{ ومنه : } 5x \equiv 6[7]$$

$$\text{ومنه : } 3 \times 5x \equiv 3 \times 6[7] \text{ ومنه : } x \equiv 4[7]$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5n \equiv 10[35] \\ 7n \equiv 7[35] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} n \equiv 2[7] \\ n \equiv 1[5] \end{cases}$$

$$\text{ومنه : } 5n - 7n \equiv 10 - 7[35] \text{ ومنه : } -2n \equiv 3[35]$$

$$\text{ومنه : } 2n \equiv -3 \equiv 32[35] \text{ ومنه : } n \equiv 16[35]$$

$$\text{ومنه : } n = 35k + 16 \text{ (مع } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

تمرين 21

حل في \mathbb{Z} المعادلات التالية:

$$(1) \quad 10x + 3 \equiv 0[7]$$

$$(2) \quad 3x \equiv 2[5]$$

$$(3) \quad x^2 - 3x - 4 \equiv 0[5]$$

$$(4) \quad (3x + 1)(x - 1) \equiv 0[7]$$

الحل

$$(1) \quad 10x + 3 \equiv 0[7] \text{ ومنه : } 10x \equiv -3[7]$$

$$\text{ومنه : } 3x \equiv -3[7] \text{ ومنه : } x \equiv -1[7]$$

$$\text{ومنه : } x = 7k - 1 \text{ ($k \in \mathbb{Z}$).$$

$$(2) \quad 3x \equiv 2[5] \text{ ومنه : } 2 \times 3x \equiv 2 \times 2[5] \text{ ومنه : } x \equiv 4[5]$$

$$\text{ومنه : } x = 5k + 4 \text{ ($k \in \mathbb{Z}$).$$

(3)

ومنه : $x = 7k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

$5x - 7y = 6$ ومنه : $-7y \equiv 6[5]$

ومنه : $-2y \equiv 1[5]$ ومنه : $3y \equiv 1[5]$

ومنه : $2 \times 3y \equiv 2[5]$ ومنه : $y \equiv 2[5]$ ومنه :

$y = 5k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

إذن حلول المعادلة هي :

$x = 7k + 4$ و $y = 5k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

(2) لدينا ($4 \leq x \leq 35$ و $0 \leq y \leq 30$) يكافئ

($4 \leq 7k + 4 \leq 35$ و $0 \leq 5k + 2 \leq 30$) يكافئ

($0 \leq k \leq \frac{31}{5}$ و $-\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{28}{5}$ و $k \in \mathbb{Z}$)

إذن $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

ومنه الثنائيات المطلوبة هي :

$(x; y) \in \{(4; 2), (11; 7), (18; 12), (25; 17), (32; 22)\}$

(3) $a \equiv 4[7]$ يكافئ $a = 7f + 4$ ($f \in \mathbb{N}$)

و $a \equiv -2[5]$ يكافئ $a = 5h - 2$ ($h \in \mathbb{N}^*$)

ومنه : $5h - 2 = 7f + 4$ يكافئ $5h - 7f = 6$ و حسب السؤال

(1) فإن : $h = 7k + 4$ و $f = 5k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

ومنه : $a = 7f + 4 = 7(5k + 2) + 4 = 35k + 18$ و $k \in \mathbb{N}$.

و تكون أصغر قيمة للعدد الطبيعي a هي 18 ($k = 0$)

تمرين 23

(1) حل المعادلة : $8x \equiv 11[7]$.

(2) استنتج في \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة $8x - 7y = 11$ *

(3) أدرس بواقى قسمة العدد 4^n على 7 .

(4) نفرض أن $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 و حل للمعادلة * و نضع :

$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ عن العدد الطبيعي n حيث :

$3S_n \equiv 0[7]$

الحل

(1) $8x \equiv 11[7]$ ومنه : $x \equiv 4[7]$ يكافئ $x = 7k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$)

(2) $8x - 7y = 11$ ومنه $8x \equiv 11[7]$ و حسب السؤال (1) فإن

$x = 7k + 4$ و بتعويض قيمة x في المعادلة * نجد :

$8(7k + 4) - 7y = 11$ ومنه : $7y = 8(7k + 4) - 11$ ومنه :

$y = 8k + 3$.

إذن حلول المعادلة * هي : $x = 7k + 4$ و $y = 8k + 3$.

(3) $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$.

فالدور هو 3 . ومنه $4^{3k} \equiv 1[7]$ ، $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ ،

$4^{3k+2} \equiv 2[7]$.

(4) لدينا $x = 7k + 4$ و

$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$

$= 1 + (7k + 4) + (7k + 4)^2 + \dots + (7k + 4)^{n-1}$

ومنه: $[7] S_n \equiv 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}$ ونعلم أن :

$$1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

مجموع n حد الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $q = 4$

$$3S_n \equiv 0 [7] \text{ ومنه: } 4^n - 1 \equiv 0 [7] \text{ ومنه: } 4^n \equiv 1 [7]$$

إذن $n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

تمرين 24

(I) لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - 10u_n = 9 \end{cases} \text{ و } v_n - u_n = 1$$

(1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول

و أساسها q

(2) استنتج عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(II) (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة

الإقليدية لـ 10^n على 37.

(2) عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها

$$3[S_n + (n+1)] \text{ قابلا للقسمة على } 37.$$

الحل

(I - 1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (10u_n + 9) + 1 = 10(u_n + 1) = 10v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية حدها الأول 3

و أساسها $q = 10$.

$$u_n = v_n - 1 = \boxed{3 \times 10^n - 1} \text{ و } v_n = v_0 \times q^n = \boxed{3 \times 10^n} \quad (2)$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad (3)$$

$$= (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + (v_2 - 1) + \dots + (v_n - 1)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (n+1)$$

$$= 3 \times \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - (n+1) = \boxed{\frac{10^{n+1} - 1}{3} - (n+1)}$$

$$10^2 \equiv 26 [37], 10^1 \equiv 10 [37], 10^0 \equiv 1 [37] \quad (1-II)$$

$$10^3 \equiv 1 [37] \text{ فالدور هو } 3.$$

$$10^{3k+2} \equiv 26 [37], 10^{3k+1} \equiv 10 [37], 10^{3k} \equiv 1 [37]$$

$$(2) 3[S_n + (n+1)] = 10^{n+1} - 1 \text{ يكون العدد}$$

$$3[S_n + (n+1)] \text{ قابلا للقسمة على } 37 \text{ إذا}$$

$$\text{كان } 10^{n+1} - 1 \equiv 0 [37] \text{ ومنه: } 10^{n+1} \equiv 1 [37]$$

$$\text{ونعلم أن } 10^{3k} \equiv 1 [37] \text{ ومنه: } n+1 = 3k \text{ (مع } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{ومنه: } n = 3k - 1 \text{ (مع } k \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

تمرين 25

- (1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 5^n على 7.
- (2) عين باقي قسمة العدد $19^{2000} - 5^{1999}$ على 7.
- (3) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $5^n + 5^{2n} \equiv 2[7]$.
- (4) حل في \mathbb{N} المعادلة : $3 \times 26^n + 13^n \equiv 0[7]$.

الحل

- (1) $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ ، $5^6 \equiv 1[7]$ فالدور هو 6 . ومنه :
 $5^{6k} \equiv 1[7]$ ، $5^{6k+1} \equiv 5[7]$ ، $5^{6k+2} \equiv 4[7]$ ، $5^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $5^{6k+4} \equiv 2[7]$ ، $5^{6k+5} \equiv 3[7]$.
- (2) $1999 = 6 \times 333 + 1$ (شكل $6k + 1$) ومنه :
 $5^{1999} \equiv 5[7]$ ، $19 \equiv 5[7]$ ومنه : $19^{2000} \equiv 5^{2000}[7]$.
 $2000 = 6 \times 333 + 2$ (شكل $6k + 2$) ومنه :
 $19^{2000} \equiv 5^{2000} \equiv 4[7]$ ومنه $19^{2000} - 5^{1999} \equiv 4 - 5 \equiv 1[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]
$5^{2n} \equiv$	1	4	2	1	4	2	[7]
$5^n + 5^{2n} \equiv$	2	2	6	0	6	5	[7]

ومنه : $n = 6k$ أو $n = 6k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$3 \times 26^n + 13^n \equiv 3 \times 5^n + (-1)^n \equiv 0[7] \quad (4)$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]
$3 \times 5^n + (-1)^n \equiv$	4	0	6	3	0	1	[7]

ومنه : $n = 6k + 1$ أو $n = 6k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$)

تمرين 26

- (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة كلا من العددين 2^n و 5^n على 7.
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن :
 $5 \times 2^{3k+1} - 5^{6k+3} + 3 \equiv 0[7]$
- (3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون :
أ- $12^n + 16^n - 22^n \equiv 0[7]$
ب- $19^{6n+3} - 23^{3n+1} + 4n^2 + 3$ قابلا للقسمة على 7.

الحل

- (1) $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $2^{3k} \equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

ب - عين قيم n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0[7]$.

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة : $\begin{cases} 2^n \times n + (n+1) \equiv 0[7] \\ 20 \leq n \leq 80 \end{cases}$

الحل

(1) $2^0 \equiv 1[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^3 \equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $2^{3k} \equiv 1[7], 2^{3k+1} \equiv 2[7], 2^{3k+2} \equiv 4[7]$

(2) $4^0 \equiv 1[7], 4^1 \equiv 4[7], 4^2 \equiv 2[7], 4^3 \equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $4^{3k} \equiv 1[7], 4^{3k+1} \equiv 4[7], 4^{3k+2} \equiv 2[7]$

(3) $12^n + 16^n - 22^n \equiv 5^n + 2^n - 1 \equiv 0[7]$ - أ

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]
$2^n \equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$5^n + 2^n - 1 \equiv$	1	6	0	6	3	6	[7]

ومنه : $n = 6k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

ب - $19^{6n+3} - 23^{3n+1} + 4n^2 + 3 \equiv 5^{6n+3} - 2^{3n+1} + 4n^2 + 3$

$\equiv 6 - 2 + 4n^2 + 3 \equiv 0[7]$

ومنه : $n^2 \equiv 0[7]$ ومنه : $n \equiv 0[7]$ ومنه : $n = 7k$ ($k \in \mathbb{N}$)

تمرين 27

- (1) إذا كان n عددا طبيعيا فأدرس باقي قسمة 2^n ، 4^n على 7.
- (2) نضع : $a_n = 2^n + 4^n + 8^n$.
- أ - برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $a_{n+3} \equiv a_n[7]$.

ب - عين قيم n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0[7]$.

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة : $\begin{cases} 2^n \times n + (n+1) \equiv 0[7] \\ 20 \leq n \leq 80 \end{cases}$

الحل

(1) $2^0 \equiv 1[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^3 \equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $2^{3k} \equiv 1[7], 2^{3k+1} \equiv 2[7], 2^{3k+2} \equiv 4[7]$

(2) $4^0 \equiv 1[7], 4^1 \equiv 4[7], 4^2 \equiv 2[7], 4^3 \equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $4^{3k} \equiv 1[7], 4^{3k+1} \equiv 4[7], 4^{3k+2} \equiv 2[7]$

$a_{n+3} \equiv 2^3 \times 2^n + 4^3 \times 4^n + 8^3 \times 8^n \equiv 2^n + 4^n + 8^n \equiv a_n[7]$

ب - $a_n \equiv 0[7]$ ومنه :

$2^n + 4^n + 8^n \equiv 2^n + 4^n + 1 \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]
$4^n \equiv$	1	4	2	[7]
$2^n + 4^n + 1 \equiv$	3	0	0	[7]

ومنه : $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

(3) $\begin{cases} 2^n \times n + (n+1) \equiv 0[7] \\ 20 \leq n \leq 80 \end{cases}$

تمارين 28

(1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 5.

(2) استنتج باقي القسمة الإقليدية لـ 13^a ، 13^b ، 13^d على 5 حيث $d = PGCD(a; b)$ ، $b = 3500$ ، $a = 2200$.

(3) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق :

$$4^n \times (18)^{4n} + 6^{2n} (n+1) \equiv 0[5]$$

الحل

$$(1) 13^0 \equiv 1[5] , 13^1 \equiv 3[5] , 13^2 \equiv 4[5] , 13^3 \equiv 2[5] ,$$

$$13^4 \equiv 1[5] \text{ فالدور هو } 4. \text{ ومنه :}$$

$$13^{4k} \equiv 1[5] , 13^{4k+1} \equiv 3[5] , 13^{4k+2} \equiv 4[5] ,$$

$$13^{4k+3} \equiv 2[5]$$

$$(2) \text{ بما أن } 2200 = 4 \times 550 \text{ (شكل } 4k \text{) فإن : } 13^{2200} \equiv 1[5]$$

$$\text{و } 3500 = 4 \times 875 \text{ (شكل } 4k \text{) فإن : } 13^{3500} \equiv 1[5]$$

$$\text{و } PGCD(a; b) = 100 , 13^{100} \equiv 1[5]$$

$$4^n \times (18)^{4n} + 6^{2n} (n+1) \equiv (-1)^n \times 13^{4n} + 36^n \times (n+1)$$

$$(-1)^n \times 1 + 1 \times (n+1) \equiv (-1)^n + (n+1) \equiv 0[5]$$

- إذا كان n عددا زوجيا أي $n = 2k$

$$\text{فإن : } (-1)^n + (n+1) \equiv 2k + 2 \equiv 0[5]$$

- إذا كان $n = 3k$ فإن

$$2^n \times n + (n+1) \equiv 1 \times 3k + (3k+1) \equiv 6k + 1 \equiv 0[7]$$

$$\text{ومنه : } 6k \equiv -1[7] \text{ ومنه : } k \equiv 1[7] \text{ يكافئ } k = 7h + 1$$

$$(h \in \mathbb{N}) \text{ ومنه } n = 3k = 3(7h+1) = 21h + 3$$

- إذا كان $n = 3k + 1$ فإن

$$2^n \times n + (n+1) \equiv 2 \times (3k+1) + (3k+2)$$

$$\equiv 2k + 4 \equiv 0[7]$$

$$\text{ومنه : } k \equiv -2 \equiv 5[7] \text{ يكافئ } k = 7h + 5 (h \in \mathbb{N}) \text{ ومنه}$$

$$n = 3k + 1 = 3(7h+5) + 1 = 21h + 16$$

- إذا كان $n = 3k + 2$ فإن

$$2^n \times n + (n+1) \equiv 4 \times (3k+2) + (3k+3)$$

$$\equiv k + 4 \equiv 0[7]$$

$$\text{ومنه : } k \equiv -4 \equiv 3[7] \text{ يكافئ } k = 7h + 3 (h \in \mathbb{N})$$

$$\text{ومنه } n = 3k + 2 = 3(7h+3) + 2 = 21h + 11 \text{ إذن حلول}$$

$$\text{المعادلة المعطاة هي : } n = 21h + 3 \text{ و } n = 21h + 16$$

$$\text{و } n = 21h + 11 \text{ حيث } h \in \mathbb{N}$$

و $20 \leq n \leq 80$ فتكون قيم العدد الطبيعي n المطلوبة هي :

$$n \in \{24; 32; 37; 45; 58; 53; 66; 79\}$$

ومنه : $k \equiv -1 \equiv 4[5]$ يكافئ $k = 5h + 4$ ومنه :

$$(h \in \mathbb{N}) \quad n = 2k = 2(5h + 4) = 10h + 8$$

- إذا كان n عددا فرديا أي $n = 2k + 1$

$$\text{فإن : } (-1)^n + (n + 1) \equiv 2k + 1 \equiv 0[5]$$

ومنه : $2k \equiv -1 \equiv 4[5]$ يكافئ $k \equiv 2[5]$

ومنه : $k = 5h + 2$

$$\text{ومنه : } (h \in \mathbb{N}) \quad n = 2k + 1 = 2(5h + 2) + 1 = 10h + 5$$

مجموعة الأعداد الطبيعية n المطلوبة هي :

$$n = 10h + 5 \text{ و } n = 10h + 8 \text{ حيث } h \in \mathbb{N}$$

تمرين 29

(1) برهن أن العددين $(3n - 2)$ و $(2n - 1)$ أوليان فيما بينهما.

(2) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق :

$$\text{أ - } 3n - 2 \equiv 0[7]$$

$$\text{ب - } 6n^2 - 7n + 2 \equiv 0[17]$$

$$\text{ج - } \begin{cases} 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 2n - 1 \equiv 0[3] \end{cases}$$

$$\text{د - } (3n - 2)(2n - 1) \equiv 0[n + 1]$$

الحل

(1) بما أن $(-2)(3n - 2) + 3(2n - 1) = 1$ حسب مبرهنة بيزو

فالعدين $(3n - 2)$ و $(2n - 1)$ أوليان فيما بينهما.

$$(2) \text{ أ - } 3n - 2 \equiv 0[7] \text{ يكافئ } 3n \equiv 2[7] \text{ يكافئ } 3n \equiv 9[7]$$

$$\text{يكافئ } 5 \times 3n \equiv 5 \times 2[7] \text{ يكافئ } n \equiv 3[7]$$

$$. (k \in \mathbb{N}) \quad n = 7k + 3$$

$$\text{ب - } 6n^2 - 7n + 2 \equiv 0[17] \text{ يكافئ}$$

$$(3n - 2)(2n - 1) \equiv 0[17] \text{ ومنه}$$

$$(3n - 2 \equiv 0[17] \text{ أو } 2n - 1 \equiv 0[17]) \text{ (لأن عدد أولي)}$$

$$3n - 2 \equiv 0[17] \text{ ومنه : } 3n \equiv 2[17] \text{ ومنه :}$$

$$6 \times 3n \equiv 6 \times 2[17] \text{ ومنه : } n \equiv 12[17] \text{ ومنه :}$$

$$. k \in \mathbb{N} \text{ مع } n = 17k + 12$$

$$2n - 1 \equiv 0[17] \text{ ومنه : } 2n \equiv 1[17] \text{ ومنه : } 9 \times 2n \equiv 9[17]$$

$$\text{ومنه : } n \equiv 9[17] \text{ ومنه :}$$

$$. k \in \mathbb{N} \text{ مع } n = 17k + 9$$

$$\text{ج - } \begin{cases} 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 2n - 1 \equiv 0[3] \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} 9n - 6 \equiv 0[21] \\ 14n - 7 \equiv 0[21] \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\text{ومنه : } 23n - 13 \equiv 0[21] \text{ ومنه : } 2n \equiv 13[21]$$

$$\text{ومنه : } 11 \times 2n \equiv 11 \times 13[21] \text{ ومنه : } n \equiv 17[21]$$

$$. k \in \mathbb{N} \text{ مع } n = 21k + 17$$

$$\text{د - } (3n - 2)(2n - 1) \equiv 0[n + 1] \text{ يكافئ}$$

$$6n^2 - 7n + 2 \equiv 0[n + 1] \text{ يكافئ}$$

(2)

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$5^n \equiv$	1	5	3	4	9	[11]
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	[11]
$5^n - 3^n \equiv$	0	2	5	10	5	[11]

نستنتج من الجدول أن بواقي قسمة $5^n - 3^n$ على 11 هي:
0, 2, 5, 10

(3) من الجدول السابق نستنتج أن : $5^n - 3^n + 6 \equiv 0[11]$
إذا كان $n = 5k + 2$ أو مع $k \in \mathbb{N}$.



$15 \equiv 0[n+1]$ ومنه: $(6n-13)(n+1)+15 \equiv 0[n+1]$
يكافئ $(n+1) \in \{1; 3; 5; 15\}$ يقسم 15 يكافئ $(n+1) \in \{1; 3; 5; 15\}$ ومنه:
 $n \in \{0; 2; 4; 14\}$

تمرين 30

- (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 3^n على 11.
- (2) استنتج باقي قسمة $5^n - 3^n$ على 11.
- (3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $5^n - 3^n + 6$ قابلاً للقسمة على 11.

الحل

- (1) $5^1 \equiv 5[11]$ ، $5^0 \equiv 1[11]$ (1)
 $5^2 \equiv 3[11]$ ، $5^3 \equiv 4[11]$ ، $5^4 \equiv 9[11]$ ، $5^5 \equiv 1[11]$ ، فالدور هو 5. ومنه :
 $5^{5k+2} \equiv 3[11]$ ، $5^{5k+1} \equiv 5[11]$ ، $5^{5k} \equiv 1[11]$
 $5^{5k+4} \equiv 9[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 4[11]$.
 $3^3 \equiv 5[11]$ ، $3^2 \equiv 9[11]$ ، $3^1 \equiv 3[11]$ ، $3^0 \equiv 1[11]$
 $3^5 \equiv 1[11]$ ، $3^4 \equiv 4[11]$. فالدور هو 5 ومنه :
 $3^{5k+2} \equiv 9[11]$ ، $3^{5k+1} \equiv 3[11]$ ، $3^{5k} \equiv 1[11]$
 $3^{5k+4} \equiv 4[11]$ ، $3^{5k+3} \equiv 5[11]$.

تمارين مقترحة للحل

تمرين 1

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$(1) \quad n(n^6 - 1) \equiv 0[7]$$

$$(2) \quad 4^n(3n - 1) + 1 \equiv 0[6]$$

$$(3) \quad n^5 - 45n^3 + 4n \equiv 0[5]$$

$$(4) \quad 3^{2n+2} - 2^{n+1} \text{ يقبل القسمة على } 7$$

$$(5) \quad 17^{4n+1} + 3 \times 9^{2n} \equiv 0[5]$$

تمرين 2

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من

العددين 5^n و 3^n على 7.

(2) استنتج باقي قسمة العدد $5^n - 3^n + 2$ على 7.

(3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها $5^n - 3^n + 2$ يقبل القسمة على 7.

(4) عين الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ حيث: $5^x - 3^y \equiv 0[7]$

تمرين 3

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة كل من العددين

5^n و 3^n على 7.

(2) استنتج بواقي قسمة العدد $5^n + 3^n$ على 7.

(3) عين مجموعة قيم n التي تحقق:

$$(1) \quad 17^{6n+3} + 26^{6n+2} - 3n + 13 \equiv 0[7]$$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$5(3^{6n+4} + 6 \times 5^{6n+2}) \equiv 0[7]$$

تمرين 4

(1) أدرس بواقي القسمة الإقليدية لـ: 23^n و 26^n على 7.

(2) استنتج باقي قسمة $26^{2002} + 23^{2002}$ على 7.

(3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن:

$$2^{12k+4} + 5^{6k+2} + 1 \equiv 0[7]$$

(4) برهن أن العدد $a = 30^{30k+30} + (-9)^{30k+30} + 5 \times 27^{30k+30}$

يقبل القسمة على 7.

تمرين 5

حل في \mathbb{N} المعادلات الآتية:

$$(1) \quad 16^{n+3} + 22^n - 1 \equiv 0[7]$$

$$(2) \quad 2^{2n+1} + 5^n \equiv 3[7]$$

$$(3) \quad 2^n \times n + 3n \equiv 3[7]$$

$$(4) \quad 2^n - 5^{6n+1} + n - 1 \equiv 0[7]$$

تمرين 6

(1) أ - عين بواقي قسمة $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$ على 13.

ب - استنتج قسمة 5^n على 13.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$31^{4n+1} + 174^{8n+3} + 39 \equiv 0[13]$$

(3) عين العدد الطبيعي n بحيث:

$$\begin{cases} 10 \leq n \leq 40 \\ 18^{4n+2} + 44^{4n+3} - 2n^2 \equiv 2 [13] \end{cases}$$

تمرين 7

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 10^n و 11^n على 7.

(2) استنتج أن العدد $36 \times 11^{3n+1} - 10^{6n+5} - 2$ هو من مضاعفات العدد 7.

(3) عين باقي قسمة العدد $a = 10^{2002} + 11^{2003} + 8^{2002}$ على 7.

(4) عين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حيث: $10^x - 11^y \equiv 1 [7]$.

تمرين 8

(1) أدرس بواقي قسمة العدد 3^n على 8.

(2) عين العدد الطبيعي n في الحالتين التاليتين:

أ- $11^{2n} + 11^{6n+1} + 3n - 1 \equiv 0 [8]$.

ب- $3^n \times n - 8n + 2 \equiv 0 [8]$.

تمرين 9

(1) عين بواقي القسمة الإقليدية للعددين 4^n و 5^n على 7.

(2) حل في \mathbb{N} المعادلة: $86 + 88^n + 89^n \equiv 0 [7]$.

(3) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $99^{2n} + 102^{3n} + 103^{6n}$ على 7.

تمرين 10

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $n^2(n^2 - 1)$ يقبل القسمة على 12.

(2) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $n^2(n^2 - 1)$ قابلاً للقسمة على 60.

تمرين 11

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن العدد $a = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.

(2) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون العدد $b = a + 7n + 50$ قابلاً للقسمة على 17.

تمرين 12

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

(2) ما هو باقي قسمة العدد $49^{2n+1} - 7^{8n+1} + 3$ على 10.

(3) عين في النظام العشري و حسب قيم n رقم الوحدات للعدد الطبيعي $a(n)$ المعروف بـ: $a(n) = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$.

تمرين 13

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n في الحالات التالية:

أ- $n^2 + 3n + 4$ يقبل القسمة على 7.

ب- $4n + 78 \equiv 0 [n+1]$.

ج- $(2n-1)(3n+5) \equiv 0 [7]$.

تمرين 14

- (1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 13 .
- (2) ما هو باقي قسمة العدد 2007^{2003} على 13 ؟
- (3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $8 + 2 \times 5^{4n+1} + 5 \times 12^{2n+1}$ قابلا للقسمة على 13 .
- (4) حل في \mathbb{N} المعادلة : $2 \times 5^n + 25^n \equiv 9[13]$.

تمرين 15

- (1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n و 4^n على 7 .
- (2) برهن بأن العدد $8 + 74^{3n+2} + 73^{6n+4}$ يقبل القسمة على 7 .
- (3) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $32^{1997} - 38^{1998} + 3n \equiv 0[7]$.

تمرين 16

- (1) أدرس بواقي قسمة 3^n على 8 .
- (2) عين العدد الطبيعي n في الحالات التالية :
 أ- $19^{2n} + 11^{2n+1} + n + 2 \equiv 0[8]$.
 ب- $3^n \times n - 8n + 2 \equiv 0[8]$.
 ج- $3^n - 5^n + 2 \equiv 0[8]$.
- (3) عين الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ و التي تحقق : $17^x + 11^y \equiv 2[8]$.

تمرين 17

- لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = 5$ ، $u_1 = 9$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$
- (1) أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .
 - (2) أ - أكتب u_n بدلالة n .
 ب - عين العداد الطبيعية n حتى يكون u_n مضاعفا للعدد 5 .
 - (3) أ - أدرس بواقي قسمة العدد 3^n على 5 .
 ب - نضع $S_n = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^0$ عين الأعداد الطبيعية n لكي يكون : $7S_n \equiv 4[5]$.

تمرين 18

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 9 .
- (2) ما هو باقي قسمة كل من 2000^{2003} ، 1001^{2001} على 9 ؟
- (3) برهن أن العدد $1 - 2 \times 110^{6n+2} + 58^{3n+2} + 902^{6n+1}$ يقبل القسمة على 9 .
- (4) عين باقي قسمة العدد : $2^{1997} + 3^{1998} + 4^{1999} + 5^{2000} + 6^{2001} + 7^{2002} + 8^{2003}$ على 9 .

تمرين 19

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 و على 11 .
- (2) عين باقي قسمة العدد $2003^{2000} - 2004^{2000}$ على 7 .
- (3) عين الأعداد الطبيعية التي تحقق $5^n \equiv 4[77]$.

(4) ما هو باقي قسمة العدد 5^{190} على 77 .

تمرين 20

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل

من الأعداد 2^n و 3^n و 5^n على 13 .

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$$107^{3n+1} - 2 \times 31^{4n+5} + 2^{12n+2} + 1830 \equiv 0 [13]$$

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة $3^x + 5^y \equiv 1 [13]$.

(4) يحتوي كيس على 7 كرات متجانسة لا نفرق بينها عند اللمس و

مرقمة ، بحيث أرقام الكرات هي بواقي القسمة الإقليدية للعددين

3^n و 5^n على 13 ، نسحب من الكيس كرتين عشوائيا و في آن

واحد ، ما احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما عدد زوجي .

تمرين 21

(1) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية

للعدد 4^n على 7 .

ب - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، 7 يقسم العدد

$$16^{3n+1} - 3 \times 1423^{2003} - 4 \times 1424^{2004}$$

(2) حل في \mathbb{N} المعادلة : $(x+1) \times 4^x + 3 \equiv 0 [7]$.

(3) يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9 ، نسحب من

الكيس 6 قريصات في آن واحد و ليكن f المتغير العشوائي الذي

يرفق بكل سحبة أصغر رقم على القريصات المسحوبة .

أ - ما هي قيم المتغير العشوائي f ؟

ب - حدد قانون المتغير العشوائي f .

ج - احسب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي f قيمة من بواقي قسمة العدد 4^n على 7 .

تمرين 22

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل

من العددين 2^n و 3^n و 5^n على 7 .

(2) عين باقي قسمة العدد $18^{3n+5} - 9^{3n+7} + 6^{4n+1} + 2 \times 2003^n$

على 7 .

(3) حل في \mathbb{N} المعادلة $(n+1) \times 4^n + 3 \times 9^{3n+1} \equiv 0 [7]$.

(4) عين باقي قسمة العدد :

$$2^{2002} + 3^{2003} + 4^{2004} + 5^{2005} + 6^{2006} + 7^{2007} + 8^{2008} + 9^{2009}$$

على 7 .

تمرين 23

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على

9 و على 10 .

(2) حل في \mathbb{N} المعادلة $49^{2n+1} + 7^{n+1} - 999^{2003} \equiv 7 [10]$.

(3) أ - عين العدد الطبيعي n لكي $7^n \equiv 7 [90]$.

ب - عين باقي قسمة العدد 7^{50} على 90 .

ج - عين رم أحاد العدد 7^{203} .

(4) عين الثنائيات $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ حيث : $\begin{cases} 2x + 2y \equiv 1 [10] \\ 4x + y \equiv 7 [10] \end{cases}$

تمرين 24

- (1) عين الثنائيات $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ و التي تحقق : $a^2 = b^2 + 7$.
- (2) أدرس بواقي قسمة كل من a^n و b^n على 7.
- (3) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $a^{2n} - b^{2n} \equiv 0[7]$.
- (4) حل المعادلات التالية:
 أ - $a^n - b^n \equiv 1[7]$.
 ب - $a^n + 3n \equiv 0[7]$.

تمرين 25

- (1) (أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من العددين 2^n و 10^n على 13، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
 أ - من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $5 \times 2^{12n+5} + 2 \times 10^{6n+4} + 3$ يقبل القسمة على 13 .
 ب - $2 + 100^{3n+2} + 8^{4n+1}$ من مضاعفات العدد 13 .
- (2) حل في \mathbb{N} المعادلات الآتية:
 أ - $2^x - 10^x \equiv 0[13]$.
 ب - $4^{6x+1} - 2x + 1 \equiv 0[13]$.



بالتوفيق إن شاء
الله في البكالوريا

الامتحان : محمد صابور

محتويات الكتيب

المحور الأول: القواسم

7.....	الملخص
12.....	تمارين محلولة
44.....	تمارين مقترحة للحل

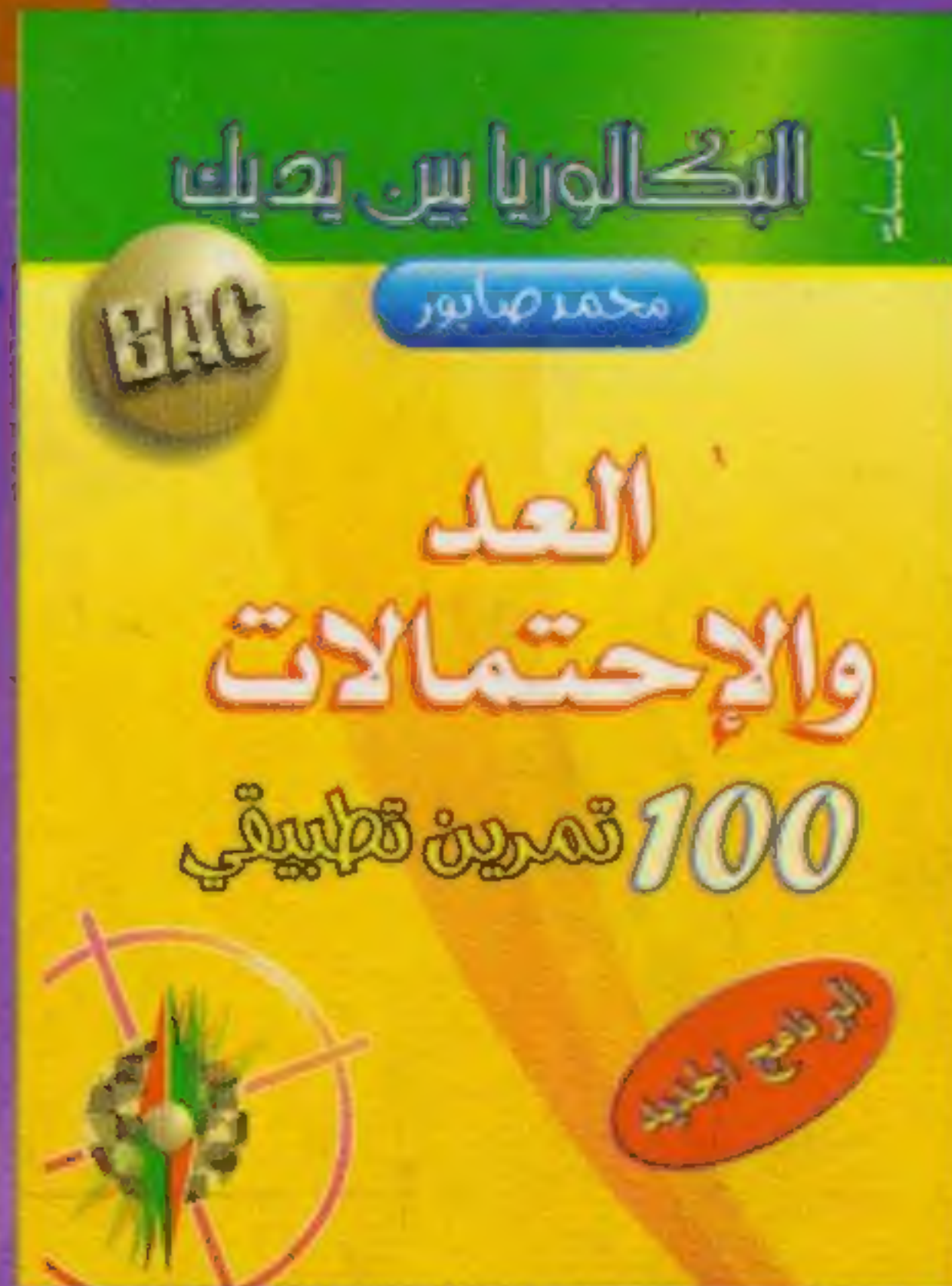
المحور الثاني: الموافقات

55.....	الملخص
57.....	تمارين محلولة
100.....	تمارين مقترحة للحل



Scanned by: Mekk. Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

في نفس السلسلة



ISBN : 978-9947-0-2054-8

Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr